FI -194 - Teoria de Campos I
Primeiro semestre de 2017
Lista de Exercícios 2

Data da entrega: 13/04/2017

Tópicos: Segunda quantização, Teoria Clássica de Campos, Teorema de Noether e correntes conservadas, Funções de Green.

1. **Campo escalar**

   Considerando que campo escalar real $\phi(x)$ satisfaz a equação de Klein-Gordon:

   (a) Calcule o comutador $[a(k), a^\dagger(k')]$;

   (b) Calcule $\partial_t\phi(x)$ e $\nabla\phi(x)$;

   (c) Calcule o comutador $[\phi(x), \pi(x')]$ em tempos iguais

   (d) Expanda a Hamiltoniana em termos dos operadores criação e destruição.

2. **Invariância por rotações e boosts**

   Considere a seguinte forma infinitesimal de uma transformação de Lorentz

   $$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \,,$$

   onde $\omega^\mu{}_\nu$ é versão infinitesimal de uma rotação/boost.

   (a) Qual é a condição sobre $\omega^{\mu\nu}$ para que Λ seja uma transformação de Lorentz?

   (b) Supondo que $x^\mu \to x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu$, mostre que um campo escalar se transforma como

   $$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x) \,,$$

   e portanto a variação da densidade de Lagrangiana é dada por

   $$\partial\mathcal{L} = -\partial_\mu(\omega^\mu{}_\nu x^\nu \mathcal{L}) \,.$$

   (c) Usando o teorema de Noether, determine a expressão da corrente conservada

   $$j^\mu = -\omega^\rho{}_\nu [T^\mu_\rho x^\nu] \,.$$

   (d) As três cargas conservadas que surgem da invariância rotacional espacial definem o *momento angular* do campo. Mostre que estas cargas são dadas por,

   $$Q_{=}\epsilon_{ijk} \int d^3x (x^j T^{0k} - x^k T0j) \,.$$

(e) Determine as cargas conservadas que surgem da invariância de Lorentz sobre boosts. Mostre que elas levam à

$$\frac{d}{dt}\int d^3x(x^iT^{00})\,,$$

Qual é a interpretação física desta equação.

3. **Potencial de Yukawa**

(a) Calcule a equação de movimento para um campo vetorial massivo A_μ a partir da Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}m^2A_\mu^2 - A_\mu J_\mu\,,$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Supondo que $\partial_\mu J_\mu = 0$, utilize as equações para determinar um restrição sobre A_μ.

(b) Se J_μ é uma corrente de uma carga pontual, mostre que a equação de movimento para A_0 se reduz à

$$A_0(r) = \frac{e}{4\pi^2 ir}\int_{\infty}^{\infty} dk \frac{k}{k^2+m^2}e^{ikr}\,.$$

(c) Calcule esta integral usando integração de contorno complexa para obter a forma de $A_0(r)$.

(d) Mostre que quando $m \to 0$ você reproduz o potencial Coulombiano.

(e) Em 1935, Yukawa sugeriu que este potencial poderia explicar como os prótons ficam ligados no núcleo. Qual é a característica qualitativa que este potencial possui quando comparado com o potencial de Coulomb, para torná-lo um bom candidato para descrever a força entre os prótons no núcleo? Qual o valor de m seria apropriado (em MeV) ?

4. **Campo escalar complexo**

Considere uma teoria de campo para um campo escalar complexo que satisfaz a equação de Klein-Gordon. A ação desta teoria é

$$S = \int d^4x(\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi)\,.$$

(a) Determine os momentos conjugados para $\phi(x)$ e $\phi^*(x)$ e as relações de comutação canônicas. Mostre que a Hamiltoniana é

$$H = \int d^3x(\pi^*\pi + \nabla\phi^*\cdot\nabla\phi + m^2\phi^*\phi)\,.$$

Calcule a equação de movimento de Heisenberg para $\phi(x)$ e mostre que ela é de fato a equação de Klein-Gordon.

(b) Diagonalize H através da introdução dos operadores de criação é aniquilação. Mostre que a teoria contêm dois conjuntos de particulas de massa m.

(c) Rescreeva a carga conservada

$$Q = \int d^3x \frac{i}{2}(\phi^* \pi^* - \pi\phi)\,.$$

em termos dos operadores criação e aniquilação, e calcule a carga de cada tipo de partícula.