FI -194 - Teoria de Campos I
Primeiro semestre de 2017
Lista de Exercícios 5

Data da entrega: 05/06/2017
Tópicos: QED escalar

1. **QED escalar**

A lagrangiana da QED escalar é dada por

$$\mathcal{L}_{SQED}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^* D_\mu\phi - m^2\phi^*\phi\,,$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ é a derivada covariante.

a) Mostre que a lagrangiana é invariante sobre a transformação de gauge

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow e^{ie\alpha(x)}\phi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)\,. \end{aligned}$$

b) Escreva o termo de fixação de gauge e mostre que ele não é invariante sobre a transformações de gauge acima dadas.

c) Desenhe os diagramas que geram as correções para o propagador do fóton em ordem $O(e^2)$ para a QED escalar. Estes diagramas são denominados *polarização do vácuo* e sua soma é usualmente denotada por $\Pi_{\mu\nu}(p)$.

d) Aplique as regras de Feynman para os diagramas encontrados no item c) e mostre que $\Pi_{\mu\nu}(p) = P_{\mu\nu}(p)\Pi(p)$, onde

$$P_{\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\,,$$

é o projetor transverso, p o momento do fóton e $\Pi(p)$ é uma função escalar. Atenção: Não é necessário calcular a integral, deixe o seu resultado em função da integral do momento do loop.

e) Seja Γ^μ e $\Gamma^{\mu\nu}$ os vértices de três e quatro pontos da QED escalar. Utilize as regras de Feynman (em nível de árvore) e verifique que as seguintes identidades são satisfeitas

$$\begin{aligned} q^\mu\Gamma_\mu(p_1,p_2) &= e[D_F^{-1}(p_1) - D_F^{-1}(p_2)]\,, \qquad (1) \\ q^\mu\Gamma_{\mu\nu}(q,k,p_1,p_2) &= e[\Gamma_\nu(p_1+q,p_2) - \Gamma_\nu(p_1,p_2-k)] \end{aligned}$$

onde $D_F^{-1}(p_1)$ é o inverso do propagador do campo escalar e q o momento do fóton. As relações acima são chamadas de *identidade de Ward-Takahashi* e são válidas em todas em todas ordens (perturbativa e não-perturbativamente). Note que elas relacionam funções de Green de n+1-pontos com a de n pontos.

f) Sem utilizar a forma explícita dos vértices em nível de árvore (Dica: use as identidades de Ward-Takahashi), prove que $p_\mu \Pi^{\mu\nu}(p) = 0$.

2. **Soma sobre as polarizações do fóton**. Mostre que a soma sobre todas as polarizações do fóton podem ser feira através da prescrição:

$$\sum_{\text{polarizações}} \epsilon^* \epsilon \to -g_{\mu\nu} \,,$$

Dica: Veja dedução no Peskin página: 159-160.

3. **Espalhamento Compton na QED escalar**

a) Calcule os elementos de matriz em nível de árvore para $\gamma\phi \to \gamma\phi$. Mostre que a identidade de Ward é satisfeita.

b) Calcule a seção de choque $\frac{d\sigma}{d\cos\theta}$ para este processo em função das polarizações dos estados iniciais e finais ϵ_μ^{in} e ϵ_μ^{out}, no referencial do centro de massa.

c) Calcule $\frac{d\sigma}{d\cos\theta}$ para ϵ_μ^{in} polarizado no plano do espalhamento, para cada ϵ_μ^{out}.

d) Calcule $\frac{d\sigma}{d\cos\theta}$ para ϵ_μ^{in} polarizado transversalmente ao plano do espalhamento, para cada ϵ_μ^{out}.

e) Mostre que quando você soma (c) e (d) você obtem o mesmo resultado se vc tivesse substituído $(\epsilon_\mu^{in})^* \epsilon_\nu^{in} \to -g_{\mu\nu}$ e $(\epsilon_\mu^{out})^* \epsilon_\nu^{out} \to -g_{\mu\nu}$.

f) Esta substituição deveria funcionar para qualquer cálculo de espalhamento?

4. **Aniquilação de pares na QED escalar**

Considere o processo da QED escalar: elétron-escalar e pósitron-escalar se aniquilando em dois fótons, $\phi^+\phi^- \to \gamma\gamma$. Considere que os escalares possuem uma massa m.

a) Calcule o elemento de matriz em nível de árvore para $\phi^+\phi^- \to \gamma\gamma$.

b) Calcule a seção de choque somando sobre todas as polarizações externas do fóton saindo, no referencial do centro de massa.

c) Tente adivinhar como a seção de choque que você acabou de calcular mudaria se o fóton tivesse uma massa m_γ.

d) Suponha que a matéria escura no universo fosse feita de um númeri igual de elétrons e pósitrons escalares de massa m, trocando um fóton massivo com massa m_γ e constante de estrutura fina α_{Dark}. Você pode ajudar os criadores de modelo de matéria escura e achar qual é a combinação apropriada de valores para m_γ e α_{Dark}, para produzir: (i) uma seção de choque de $10^{-36}\,\mathrm{cm}^2$ para $m = 10\,\mathrm{GeV}$; (ii) e uma seção de choque de $10^{-42}\,\mathrm{cm}^2$ para $m = 3.5\,\mathrm{KeV}$?

Dicas: 1) Defina em suas contas que $\alpha_{Dark} = e^2/4\pi$ e depois trate como uma constante livre. 2) Lembre-se que ao aplicar as regras de Feynman, você obtem a seção de choque em unidades naturais.