$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right)}$$

Nada mais que $\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V(\vec{r}_i)}$

P/ um conjunto contínuo de cargas ...

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int \rho V(\vec{r})\, d\mathcal{V}_{ol}}$$

cuidado volume ≠ potencial!

Podemos reescrever eliminando V e ρ para dar lugar a $\vec{E}$.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \therefore \quad W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\, V\, d\mathcal{V}$$

Podemos lembrar da integração por partes:

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = f(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot(\vec{\nabla} f)$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}\cdot(f\vec{A})\, d\mathcal{V} = \underbrace{\oint_S f\vec{A}\cdot d\vec{a}}_{\text{Teorema de Gauss}} = \int_{\mathcal{V}_{ol}} f(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\, d\mathcal{V}_{ol} + \int_{\mathcal{V}_{ol}} \vec{A}\cdot\vec{\nabla} f\, d\mathcal{V}_{ol}}$$

$$\therefore \int_{vol} f(\nabla\cdot\vec{A})\,dv_{ol} = -\int_{vol}\vec{A}\cdot\nabla f\,dv_{ol} + \oint_S f\vec{A}\cdot d\vec{a}$$

Subst. $\vec{A}$ por $\vec{E}$ e f por V

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[-\int_V \vec{E}\cdot(\nabla V)\,dv + \oint_S V\vec{E}\cdot d\vec{a}\right]$$

Mas $\nabla V = -\vec{E}$ ∴

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_V E^2\,dv + \oint_{S(V)} V\vec{E}\cdot d\vec{a}\right)}$$

Solução exata p/ qualquer volume!

Note que p/ distâncias grandes $E \to \frac{1}{r^2}$;

mas $V \to \frac{1}{r}$. O volume vai com r^3 enquanto que

a área vai com r^2

P/ o caso em que $\vec{r} >>> \vec{r}'$ (região da dist. de cargas)

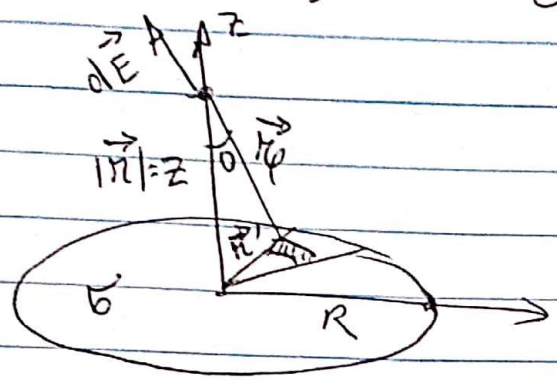
então a segunda integral tende a

zero! ∴ $\boxed{W \to \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{(V\text{ grande})} E^2\,dv}$ ou $\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{Todo espaço!}} E^2\,dv}$

contribui muito menos que o do volume!

Exemplo p/ calculo de V e $\vec{E}$

Vamos calcular o valor ~~de energia acumulado~~ potencial em uma distribuição de cargas no plano de um disco.



$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r_\varphi}$$

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma\, da}{(z^2+r'^2)^{1/2}}$$

Note! e tome cuidado, para V não tem componente como no caso de $\vec{E}$!!!

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma\, r'dr'd\phi}{(z^2+r'^2)^{1/2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma\, 2\pi\int_0^R\frac{r'dr'}{(z^2+r'^2)^{1/2}}$$

$$\boxed{V=\frac{1}{2\cancel{4\pi\varepsilon_0}}\sigma\cancel{2\pi}\left[\sqrt{z^2+r'^2}\right]\Big|_0^R=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(z^2+R^2)^{1/2}-z\right]}$$

Note que p/ $z>>R$ recuperamos o resultado de uma carga pontual como esperado!

$$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[z\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2}-z\right]$$ em série de Taylor

$$V\approx\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\cancel{z}+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z}-\dots-\cancel{z}\right]\approx\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\frac{R^2}{z}=\frac{q\cancel{R^2}}{\varepsilon_0 4(\pi\cancel{R^2})z}$$

$$=\boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z}}$$

$\vec{E} = -\nabla V \therefore \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$ o campo no disco $\hat{z}$

Note que não estamos calculando a componente do campo na polarização, por exemplo, ou fora do EIXO!

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}\right]\hat{z}}$$

p/ $z \ll R$ recuperamos o campo p/ uma placa plana infinita!

$$\boxed{\vec{E} \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}}$$

CONDUTORES

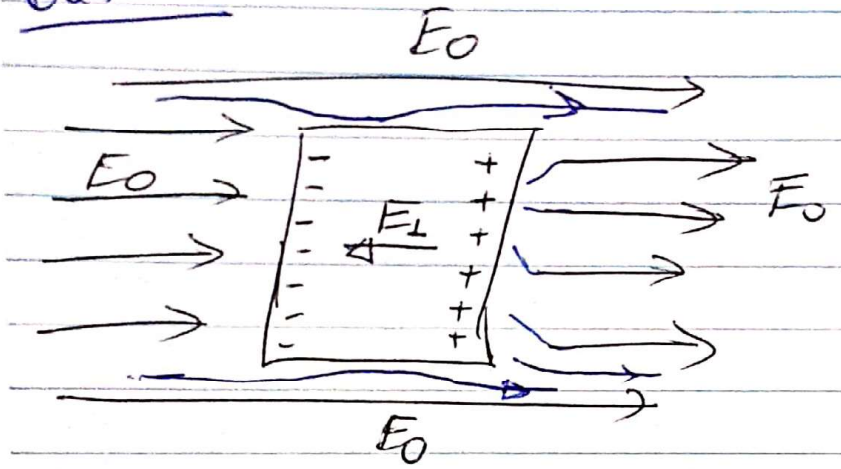
1) Isolantes: Os elétrons são ligados ~~ao material~~ a cada átomo do material, não existindo elétrons livres para mover-se.

2) Em condutores, existe um ou mais elétrons por átomo que estão "LIVRES" p/ mover-se através do material.

(1) $E = 0$ dentro de um condutor.

A primeira ideia é que se existisse campo dentro do condutor, as cargas sofreriam uma força e então não estaríamos na situação eletrostática.

De uma forma mais geral podemos verificar o caso de um condutor na região de um campo ~~elétrico~~ elétrico $\vec{E}_0$ externo.



Próximo do condutor, o campo externo também é afetado!

As cargas movem até que $\vec{E}$, com ele completamente E_0 na região interna do condutor. Lembrando que efetivamente são os elétrons que se movem.

(ii) $\rho = 0$ dentro de um condutor:

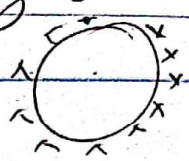
De Lei de Gauss temos: $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$. Mas se $\vec{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\rho = 0}$

$$\sum_i (q^+ + q^-) = 0$$

IMPORTANTE

(iii) Qualquer carga residual está na superfície.

Em termo da energia total, isto faz sentido pois o sistema tende minimizar a energia. Compare



$$W_E = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R}$$

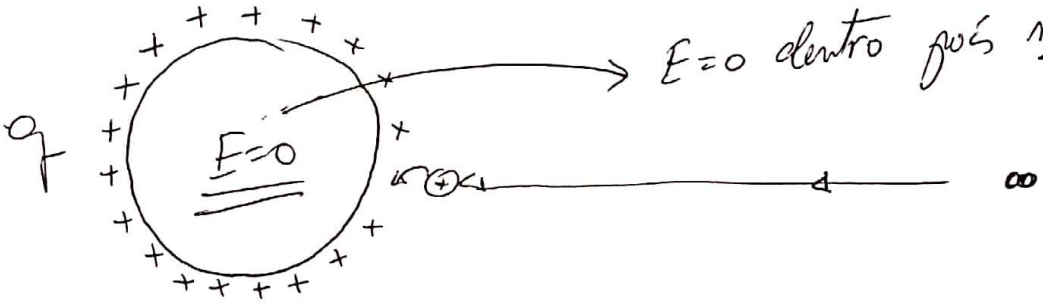
Vamos verificar iii

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_V E^2 dV + \oint_{S(V)} V\,\vec{E}\cdot d\vec{a}\right)}$$

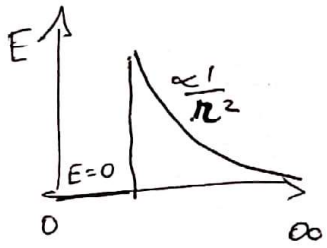
ou

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{Todo espaço}} E^2 dV$$

1º] Vamos verificar o auto energia p/ colocar cargas em uma superfície de raio R



$E=0$ dentro pois não tem carga!



Se o nosso volume é todo o espaço então

$$W_{sup} = \frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S V\,\vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{\cancel{\varepsilon_0}}{2}\int_0^{\pi}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,\frac{q}{4\pi\cancel{\varepsilon_0}R^2}\,2\pi R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$W_{sup} = \frac{q^2}{2\cdot 4\pi\varepsilon_0 R}\,\frac{\cancel{2\pi R^2}\,2}{\cancel{4\pi R^2}} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

mas $R\to\infty$ $\therefore$ $\boxed{W_{sup}\to 0}$

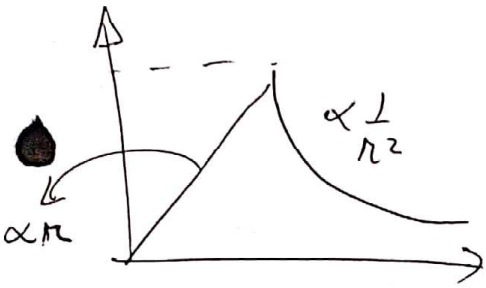
$$W_{vol} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R \cancel{E^2}^{\,0}\, dV + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^{\infty}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^{\infty}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{4\pi r^2 dr}{r^4}$$

$$= \frac{\cancel{\varepsilon_0}}{2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0^{\cancel{2}}}\left[-\frac{1}{R}\Big|_R^{\infty}\right] = \boxed{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$

2º] Vamos agora verificar o custo energético p/ colocar carga em volume (densidade constante!) de raio R.

$$W_{vol} = \int_{\substack{Volume \\ (todo\ \rho)}} E^2\, dv = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho\frac{4\pi}{3}r\right)^2 4\pi r^2\, dr}_{\text{I}}$$

$$+ \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty \frac{q^2}{(4\pi\varepsilon_0 r^2)^2}\, 4\pi r^2\, dr}_{\text{II}}$$



II Este já vimos que dá $= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

I Temos $\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0^2 q^2}4\pi\int_0^R r^4\, dr = \frac{\rho^2}{2\varepsilon_0 q^2}\frac{4\pi R^5}{5} = \frac{q^2}{\frac{16\pi^2}{q^2}R^6\, 2\varepsilon_0 q^2 5}\cancel{4\pi R^5}$

$$= \boxed{\frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}}$$

$$W_{vol} = \text{I} + \text{II} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{8}\right) = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1+5}{40}\right)$$

$$W_{vol} = \boxed{\frac{3}{20}\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R}}$$

$$\boxed{W_{CASO\ 1^\circ} < W_{CASO\ 2^\circ}}$$

0,125 0,15

Em resumo gasta-se mais energia p/ armazenar carga no volume que na superfície!!!

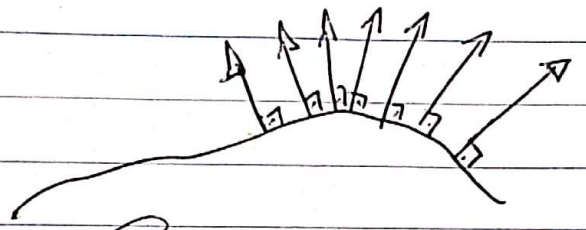
Com (Homogênea q) $\Rightarrow W = \frac{3}{20\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R}$ ...

(iv) Um condutor é uma superfície equipotencial!

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$ sendo

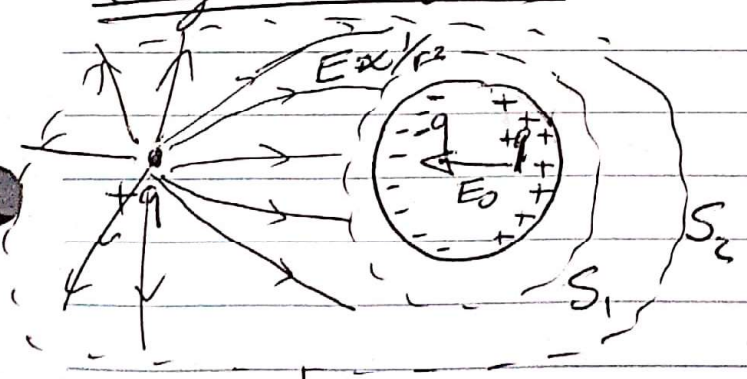
$\vec{a}$ e $\vec{b}$ qualquer ponto na superfície $\therefore V(\vec{a}) = V(\vec{b})$

(v) $\vec{E}$ é sempre perpendicular à superfície logo fora do condutor!



Caso contrário, qualquer componente $E_{\parallel}$ produziria uma mudança na distribuição de cargas!

Cargas induzidas

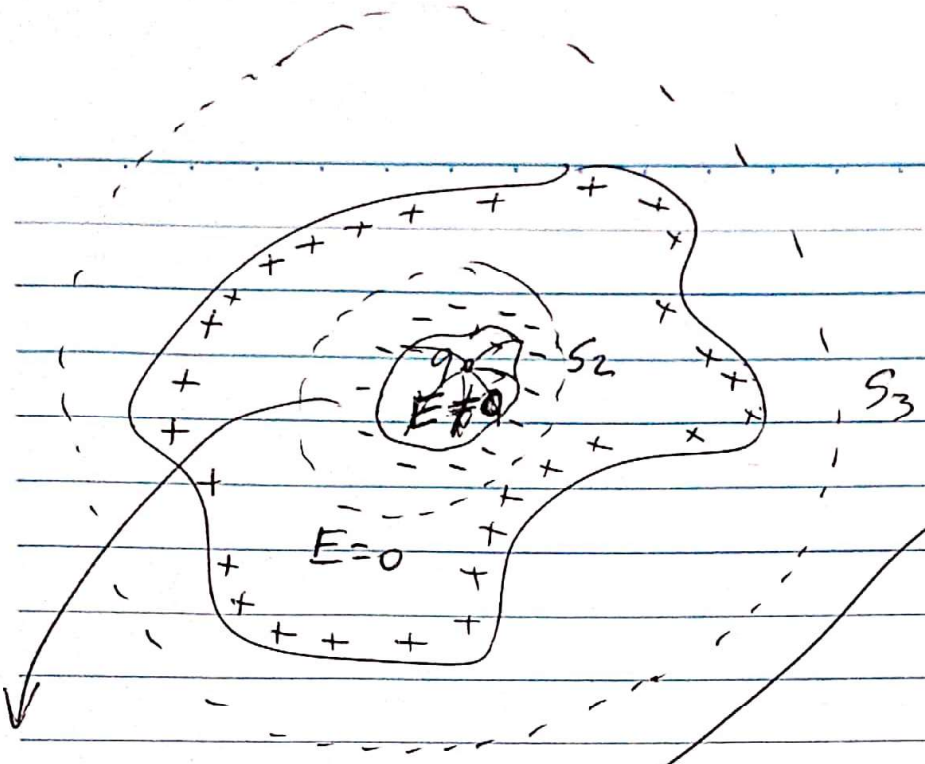


$$\boxed{\oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{a} = 0} = \frac{(+q-q)}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

S_2 → cuidado com simetria!

No entanto, existe uma força de atração entre $+q$ e esfera neutra!! Esta ~~[illegible]~~ força será calculada mais adiante no curso!



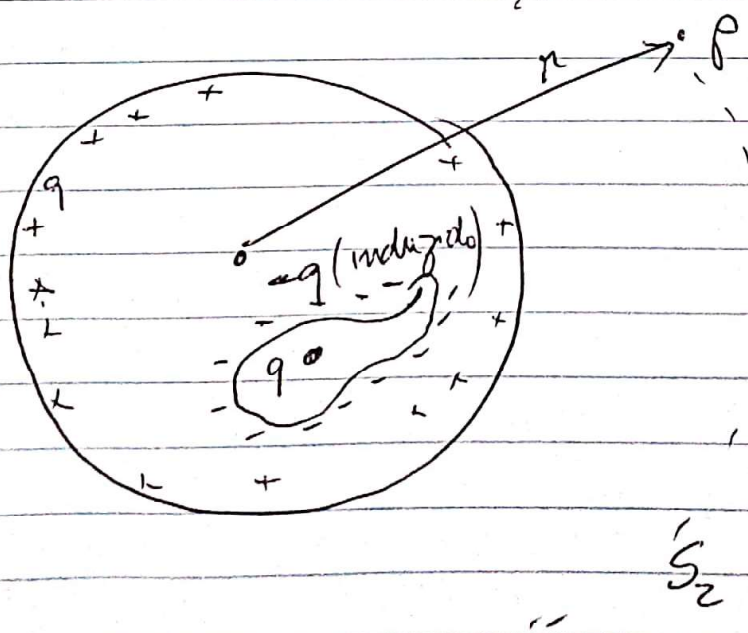
$$\oint_{S_1 \text{ (engloba } q)} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$\oint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{q_{\text{induzido}} = -q}$$

Em particular este valor era o esperado, pois o condutor é neutro!



MUITO IMPORTANTE!

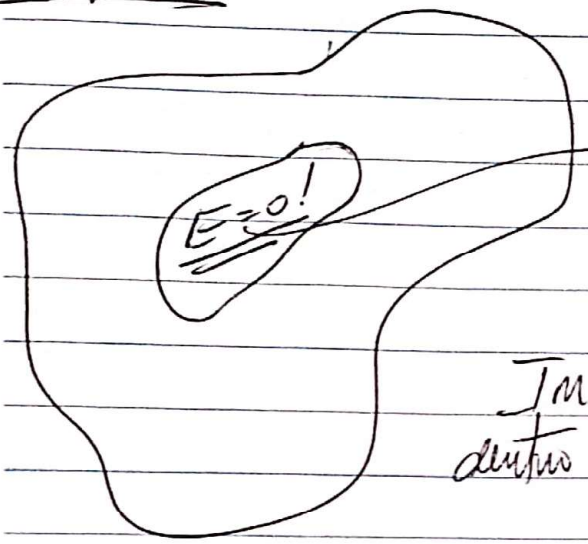
$\vec{E}_{\text{interno buraco}} \neq 0$

$\vec{E}_{\text{int condutor}} = 0$

$$\int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q + \cancel{(-q_{\text{ind}})} + \cancel{(+q_{\text{ind}})}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

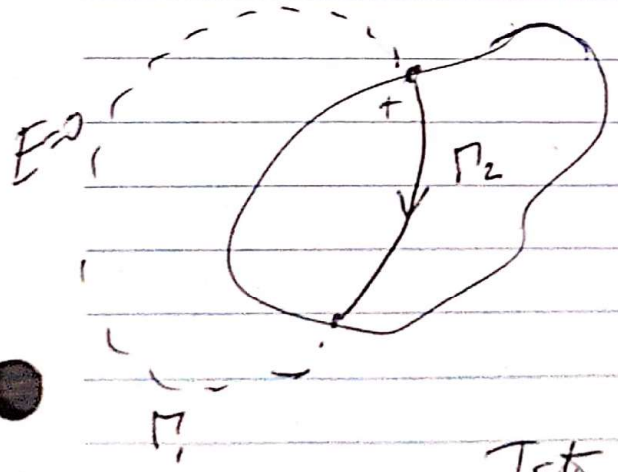
$$\therefore \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Pense sobre os campos separadamente e o princípio de superposição!



→ superfície interna e uma cavidade / sem carga

Imagine se existisse um campo dentro da ~~condutor~~. ~~Interior~~ cavidade.



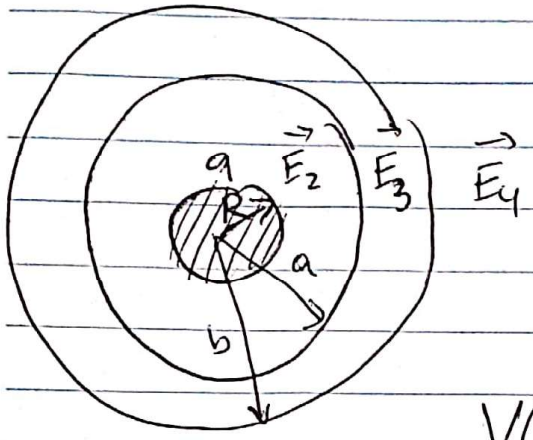
$$\therefore \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_{\Gamma_1} 0 \cdot d\vec{l}}_{0} + \int_{\Gamma_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} \neq 0$$

Isto viola $\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$ ∴

De fato $\vec{E} = 0$ dentro da cavidade; E não existe cargas na superfície da cavidade!

Você está salvo de ser eletrocutado dentro de uma Gaiola de Faraday

Problema 2,35



$$\sigma_R = \frac{+q}{4\pi R^2} \quad ; \quad \sigma_a = \frac{-q}{4\pi a^2}$$

$$\sigma_b = \frac{+q}{4\pi b^2}$$

$$V(0) = -\int_{r_{inf}=\infty}^{0} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

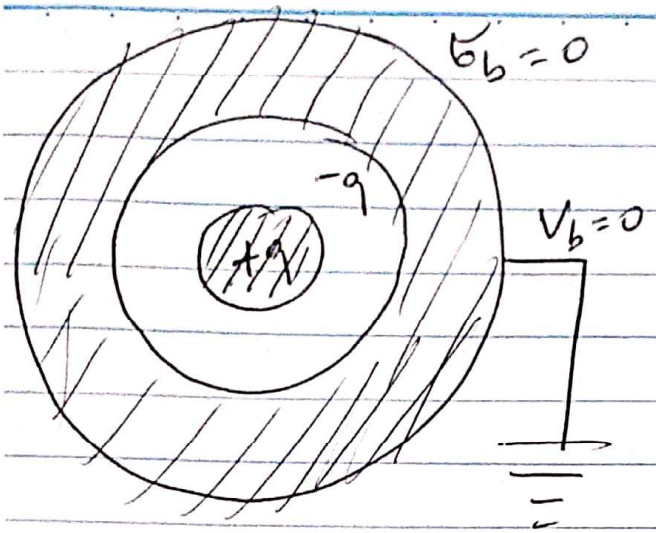
$$V(0) = -\int_R^0 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_a^R \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} - \int_b^a \vec{E}_3 \cdot d\vec{l} - \int_\infty^b \vec{E}_4 \cdot d\vec{l}$$

$\vec{E}_1 = 0$ e $\vec{E}_3 = 0$

$$V(0) = -\int_a^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr - \int_\infty^b \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$V(0) = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right] + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{b}$$

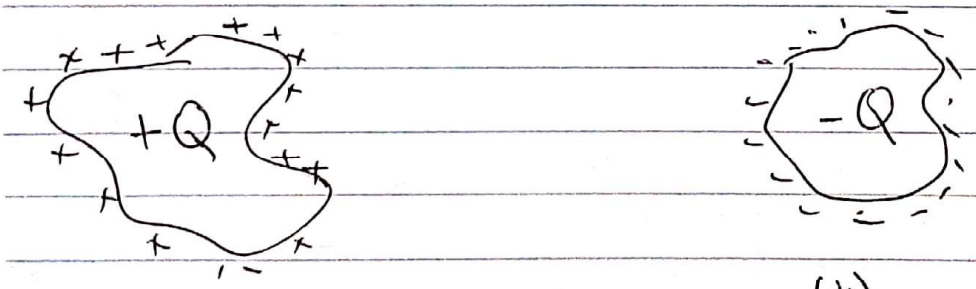
$$\boxed{V(0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]}$$



$$V(0) = -\int_{\infty}^{a} (0)\, dr + -\int_{a}^{R} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right) dr - \int_{R}^{0} (0)\, dr$$

$$\boxed{V(0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right)}$$

Capacitores



$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

pois V_+ e V_- são constantes!!

Não conhecemos a ~~carga~~ distribuição de carga sobre cada condutor em particular. Calcular o campo seria muito complicado dependendo da geometria dos condutores.

Por outro lado, sabemos que $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\, \hat{\mathscr{r}}\, dV}{\mathscr{r}^2}$