Exemplo 3.6 | Se o potencial na superfície de uma casca esférica de raio R é $V_0(\theta)$; Encontrar o potencial dentro da esfera.

Lembrando que: $\boxed{V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)}$

Na origem a solução ~~explode~~ diverge se $B_l \neq 0 \therefore \boxed{B_l = 0}$

Na superfície da esfera, a solução está dada.

$$r = R \therefore \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) = V_0(\theta) \quad \text{I}$$

Podemos usar a condição de ortogonalidade das funções de Legendre e multiplicar por $P_{l'}(\cos\theta)$ dos dois lados.

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x)\, dx = \begin{cases} 0 & l \neq l' \\ \frac{2}{2l+1} & \text{se } l = l' \end{cases}$$

$$\therefore A_{l'} R^{l'} \frac{2}{2l'+1} = \int_0^{\pi} V_0(\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta$$

$$\therefore \boxed{A_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_0^{\pi} V_0(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta.}$$

A solução depende de encontrar A_l; ou seja o resultado da integral.

Se pudermos escrever o potencial como um polinômio podemos comparar diretamente resultados e "descobrir" quem são os coeficientes necessários p/ a solução.

Por exemplo se $V_0(\theta) = K \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\cos(\theta) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\cos(\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \quad V_0(\theta) = \frac{K}{2}(1 - \cos\theta)$$

MAS se $P_0(\cos\theta) = 1$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$\therefore \boxed{V_0(\theta) = \frac{K}{2}\left(P_0(\cos\theta) - P_1(\cos\theta)\right)}$$

Investigando (I) → (página anterior!) descobrimos que e sono vai até $\pm \begin{cases} l=0 \text{ e} \\ l=1 \end{cases}$

$$\therefore A_0 R^0 P_0(\cos\theta) + A_1 R P_1(\cos\theta) = \frac{K}{2} P_0(\cos\theta) - \frac{K}{2} P_1(\cos\theta)$$

$$\therefore A_0 = \frac{K}{2} \quad \text{e} \quad A_1 = -\frac{K}{2R}$$

$$\therefore \boxed{V(r,\theta) = \frac{K}{2}\left[1 - \frac{r}{R}\cos\theta\right]}$$

E como ficaria a solução p/ V fora do esfero?

$V \to 0$ p/ $r \to \infty$ $\therefore$ $\boxed{A_\ell \Rightarrow 0}$

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta).$$

Mas na superfície, sabemos que $V(R,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) = V_0(\theta)$

$$\therefore \quad \frac{B_{\ell'}}{R^{\ell'+1}} \frac{2}{2\ell'+1} = \int_0^{\pi} V_0(\theta) P_{\ell'}(\cos\theta) \sin(\theta)\, d\theta$$

ou $$B_\ell = \frac{2\ell+1}{2} R^{\ell+1} \int_0^{\pi} V_0(\theta) P_\ell(\cos\theta) \sin(\theta)\, d\theta$$

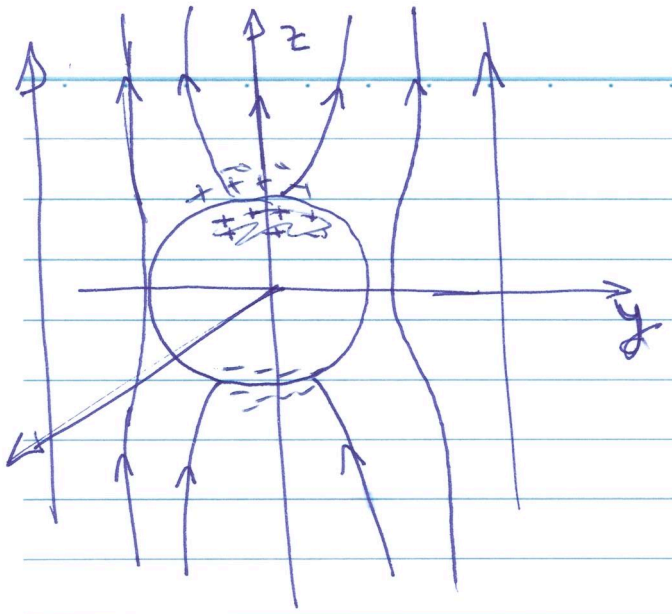
Se novamente o potencial no sup. for o do caso anterior então:

$$\frac{K}{2}\left[P_0(\cos\theta) - P_1(\cos\theta)\right] = \frac{B_0}{R} P_0(\cos\theta) + \frac{B_1}{R^2} P_1(\cos\theta)$$

$$\therefore \boxed{V(r,\theta) = \frac{K}{2}\left[\frac{R}{r} - \frac{R^2}{r^2}\cos\theta\right]}$$

Ex 3.8

P/ superfície condutora não carregada (mas não aterrada!) na presença de um campo $\vec{E} = E_0 \hat{z}$



A superfície da esfera é uma equipotencial!

Se ela for igual a $V(R,\theta)=0$, por simetria o plano xy é igual a uma equipotencial

$V_{xy}=0$ ∴

Agora p/ $r \to \infty$ $\vec{E} \to E_0\hat{z}$

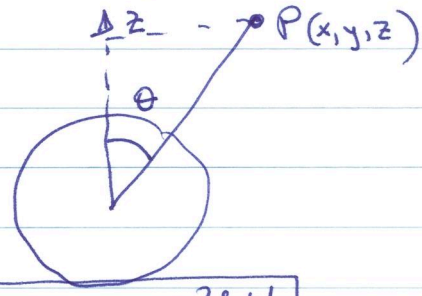
$$\therefore \boxed{V \to -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = -E_0 z + C}$$

$$\therefore \boxed{V \to -E_0 z + C} \quad p/ \quad r \gg R$$

Mas em $z=0$ $V_{x,y,0}=0$ ∴ $\boxed{C=0}$

(Com contínua não satisfaz!!)

Nossas condições p/ o problema serão



(I) $V=0$ $r=R$

(II) $V \to -E_0 \underbrace{r\cos\theta}_{z}$ $p/ r \gg R$

$$\therefore A_\ell R^\ell + \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} = 0 \Rightarrow \boxed{B_\ell = -A_\ell R^{2\ell+1}}$$

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

Aplicando (2) O segundo termo é desprezível

$$\frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \to 0$$

$$\therefore \sum A_l r^l P_l(\cos\theta) = -E_0 r \cos\theta$$

Somente precisamos de $\underline{\underline{l=1}}$

$$\therefore A_1 r \cos\theta = -E_0 r \cos\theta \therefore \boxed{A_1 = -E_0}$$

$A_l = 0$ p/ $l \neq 1$

$$\boxed{V(r,\theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos\theta}$$

ou $V(r,\theta) = \underbrace{-E_0 r \cos\theta}_{\substack{\text{devido ao} \\ \text{campo presente} \\ \vec{E}_0 = E_0 \hat{z}}} + \underbrace{\frac{E_0 R^3}{r^2}}_{\text{devido às cargas induzidas!}}$

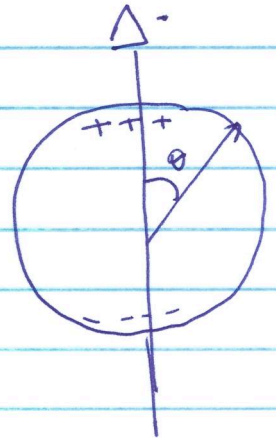
Podemos agora calcular o campo elétrico em todo o espaço!

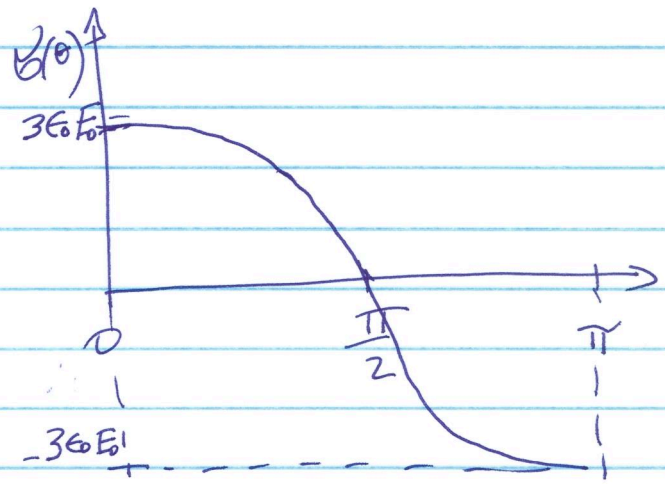
$$\left\{\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = +E_0\left(1-\frac{2R^3}{r^3}\right)\cos\theta \\ E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = -E_0\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\} \text{ p/ } r \geq R$$

Obviamente $\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \vec{\nabla} V \cdot \hat{n}\Big|_{r=R}$ $\therefore$ $\sigma(\theta) = \epsilon_0 \underbrace{\left(-\frac{\partial V}{\partial r}\right)}_{E_r}$

$$\therefore \sigma(\theta) = \epsilon_0\left[+E_0\left(1+\frac{2R^3}{R^3}\right)\cos\theta\right]$$

$$\boxed{\sigma(\theta) = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta}$$





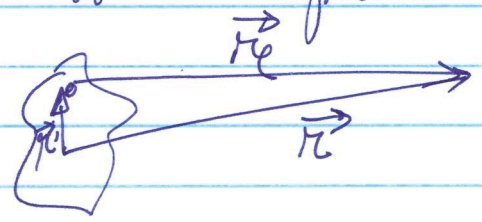
$$Q = \int \sigma(\theta)\, da = \int \sigma(\theta)\, R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= R^2\, 3\epsilon_0 E_0\, 2\pi \underbrace{\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta}_{0}$$

$\therefore$ $\boxed{Q = 0}$ Condição inicial é esfera não carregada !!

3.4 || Expansão Multipolar

Potencial aproximado a distâncias grandes.



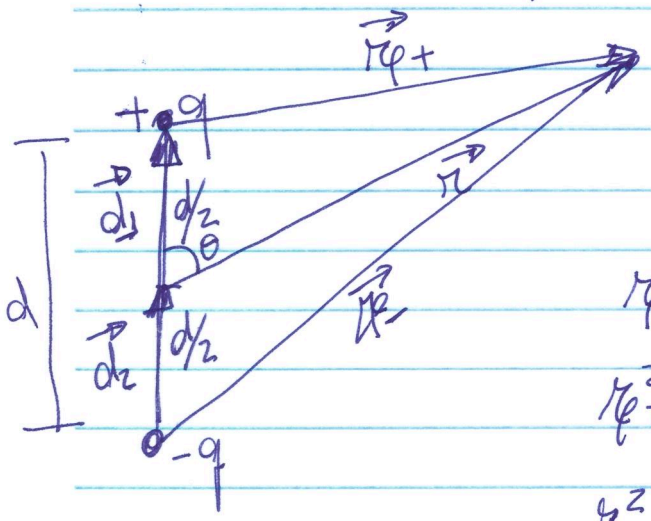
p/ $\vec{r} \gg \vec{r}'$

$$V \to \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Mas $V \to 0$ não é exatamente o que queremos, mesmo se q for muito pequeno. Também queremos somente o limite de $r \to \infty$. Queremos algo mais detalhado.

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_{q+}} - \frac{q}{r_{q-}}\right)}$$

Dipolo Elétrico



$$\therefore \vec{r_{q+}} = \vec{r} - \vec{d_1}$$

$$\vec{r_{q-}} = \vec{r} + \vec{d_2}$$

$$r_{q+}^2 = (\vec{r} - \vec{d_1}) \cdot (\vec{r} - \vec{d_1})$$

$$r_{q+}^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} - r d \cos\theta$$

$$r_{q-}^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} + r d \cos\theta$$

$$\therefore r_{q\pm}^2 = r^2\left(1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{r_{q\pm}} \cong \frac{1}{r}\left(1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta + \cancel{\frac{d^2}{4r^2}}\right)^{-1/2}$$

fica muito pequeno se comparado a $\frac{d}{r}$

fazendo $\frac{d}{r}\cos\theta = x$ segue

$$(1 \mp x)^{-1/2} \cong 1 \pm \frac{1}{2}x \mp \cancel{\frac{3}{8}x^2}^{\,0} + \dots$$

$$\therefore \frac{1}{r_\pm} \cong \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$$

$$\therefore \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \cong \frac{d}{r^2}\cos\theta$$

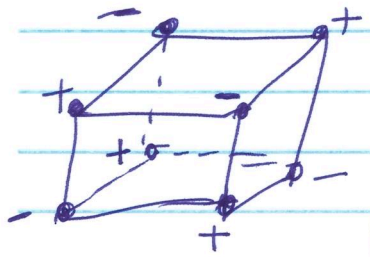
$$\therefore \boxed{V(\vec{r}) \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2}}$$

<u>Note</u>:

$+q$ (Monopolo) $V \sim \frac{1}{r}$

agora $-q$ $+q$ (Dipolo) $V \sim \frac{1}{r^2}$

Podemos montar: $+$ $-$ $-$ $+$ Quadrupolo $V \sim \frac{1}{r^3}$



Octopolo $V \sim \frac{1}{r^4}$