LEIS DE NEWTON

DISCUSSÃO:

(I) Um corpo continua estacionário ou em movimento retilíneo uniforme a menos que uma força atue sobre o mesmo

→ Para ser mais geral é necessário explicitar o sistema de referência escolhido.

(II) Força é uma quantidade vetorial que está relacionada com a taxa de variação do momento de uma partícula, definindo

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{sendo} \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

A 2ª lei é na verdade uma definição operacional p/ força.

(III) Se dois corpos exercem força um sobre o outro, estas forças serão iguais em magnitude e ~~opostas~~ direção em ~~direção~~ {sentido}.

Esta pode ser considerada uma lei de fato! No entanto, não é geral. Aplica-se a forças centrais, atrativa ou repulsiva

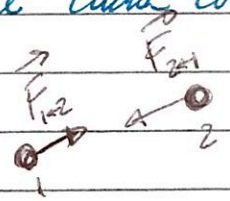
gravitacional ~~gravitacional~~, elétrica
elétrica

Forças centrais: Atua ao longo da direção que liga duas partículas!

Forças elásticas também são centrais em muitos casos. De fato, estas forças são efeitos macroscópicos de forças eletrostáticas (que são centrais).

Forças que dependem da velocidade podem não obedecer a 3ª lei quando a partícula está em movimento; pois a interação se propaga com a velocidade da luz (não é instantânea)

III Se dois corpos estão isolados (sistema ideal), então a aceleração sobre estes corpos sempre será em direção oposta e a magnitude da aceleração depende do inverso da massa de cada corpo; ou seja:



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

pela 2ª lei: $\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$, se a massa for cte!:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = m_2\left(\frac{-d\vec{v}_2}{dt}\right)$$

$$m_1 \vec{a}_1 = m_2\left(-\vec{a}_2\right)$$

$$\therefore \frac{m_2}{m_1} = \frac{+|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}$$

Algumas quantidades:

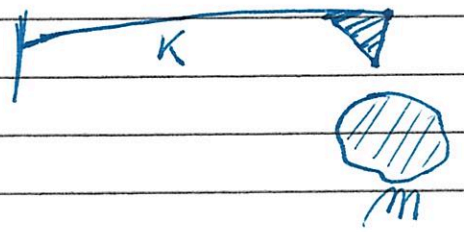
- Determinar a aceleração: depende de um sistema de referência apropriado e relógios; bem como, medidas de distância em função do tempo.

- Determinar massa: É tipicamente feito por comparação com padrões. Medidas através do peso do objeto próximo a um corpo gravitacional

- Eventualmente através de forças de outra natureza (eletrostática).

Como medir a massa de uma nanopartícula?

→ Que tal usar um microscópio de força Atômica: AFM.



ou uma balança de QUARTZO?

$f \propto \sqrt{\frac{k}{m}}$

se m aumenta f diminui.

Diferenças:

massa inercial: Esta massa determina a ~~aceleração~~ aceleração ~~dado~~ do corpo a ação de uma força (método de rapidade)

massa gravitacional: massa determinada pela força grav. entre dois corpos.

Princípio da Equivalência: $M_{Inercial} = M_{gravitacional}$
NEWTON e Galileu foram os primeiros a testarem.
Diferentes métodos modernos p/ calcular a diferença entre M_I e M_g, mostram que é menor que $\frac{1}{10^{12}}$.

Tudo isto é importante para mostrar que a mecânica Newtoniana falha em alguns limites como o de massas muito pequenas → Mecânica Quântica, e velocidades muito altas, aproximando-se da velocidade da luz (Mecânica relativística)

Outra importante consequência da 3ª lei é:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p_1} + \vec{p_2}\right) = 0$$

$$\boxed{\vec{p_1} + \vec{p_2} = cte}$$ Na ausência de forças externas! (sistema isolado).

A conservação do Momento linear é mais geral que a 2ª lei.
Sempre é obedecido na ausência de forças externas!

Ex: Conservação do Mom. Linear p/ fótons ou partículas com massa.

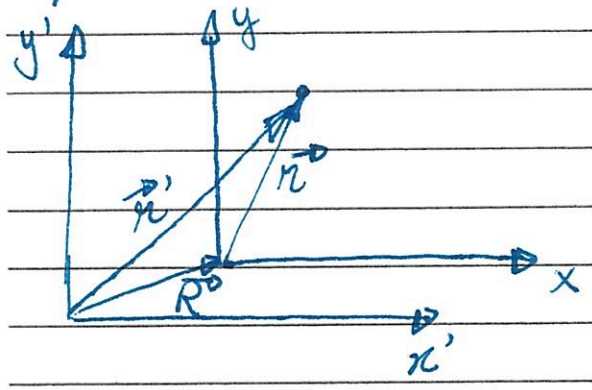
Na verdade, no limite de velocidades relativísticas, a

massa tem uma relação explícita com a velocidade e a energia.

Voltaremos a isto mais tarde...

Sistemas de referência:

Leis de Newton só são válidas como escritas da forma anteriormente apresentadas para sistemas de referencial inercial.



$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R}$$
$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{V}$$
$$\vec{a}' = \vec{a} + \vec{A}$$

Se $\vec{V} = cte$ então $\vec{a}' = \vec{a}$ pois $\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 0$

Podemos dizer neste caso que (x, y) e (x', y') são sistemas de referencial inercial. Ou seja invariante sob uma transformação de Galileo

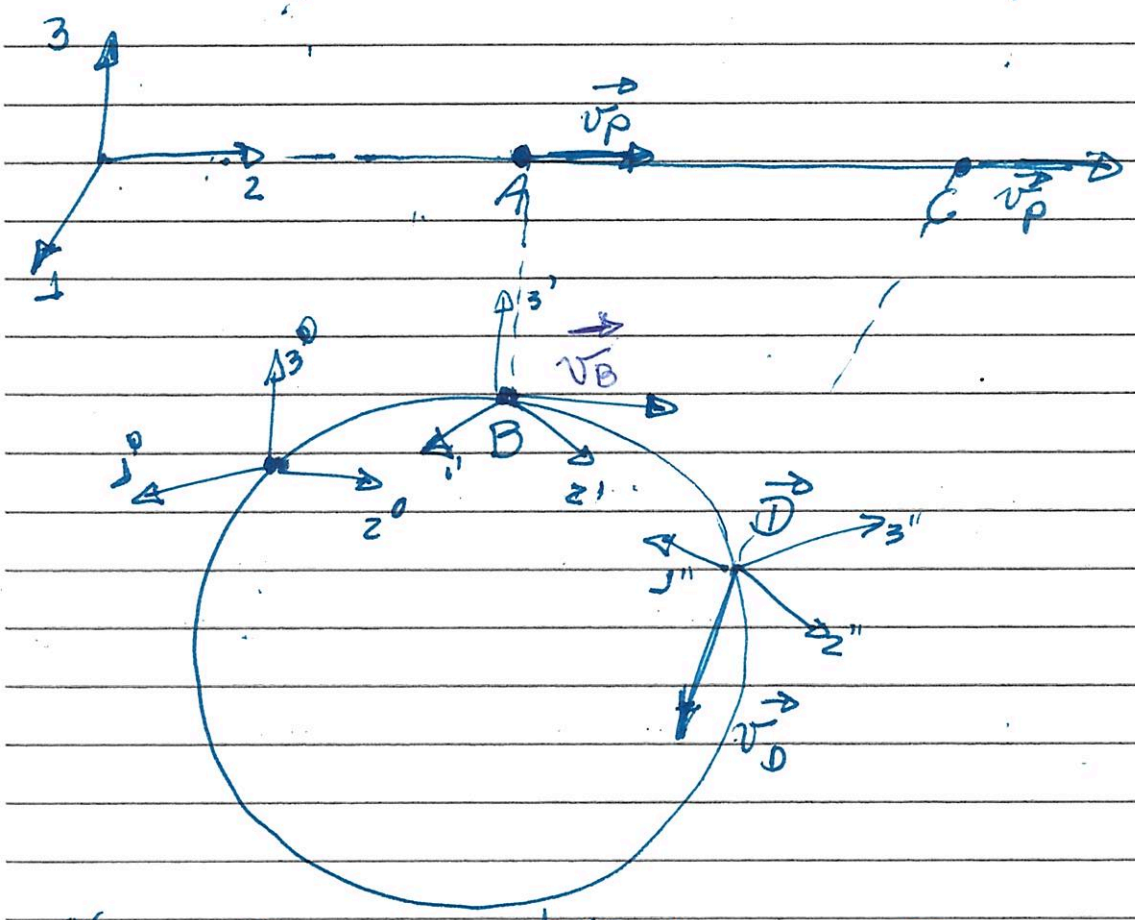
ou obedecem o Princípio da Relatividade Newtoniana

— No limite de $|\vec{v}| \to c$ não faz sentido pensar em sistemas de referencial inercial absoluto. Aliás não temos um sistema de ref. absoluto nunca!

— Necessário que as eq. de movimento sejam independentes da origem do sistema de coordenadas e de sua orientação no espaço

— Homogeneidade do tempo: necessita de repetidas medições

Exemplo de ref. Não inercial:



p/ um determinado instante t_0, o sistema de ref' está com velocidade (vetorial) igual a da partícula $\vec{v}_B = \vec{v}_P$

Ou seja, uma pessoa neste sistema, avalia que a partícula está parada.

A medida que o tempo passa; em um ponto D'' o mesmo conclui que a mesma está acelerada.

No entanto, um observador no sistema "sem linha" (1,2,3) sempre mede velocidade constante p/ a mesma partícula.

Desta forma, conclui-se que sistemas em movimento de rotação não são INERCIAIS!

Em sistemas de ref. acelerados as leis de Newton ganham termos adicionais (Capítulo 10 do MARION)

Eq. de Movimento de uma partícula

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

p/ m constante:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\ddot{\vec{r}}$$

Em geral queremos encontrar $\vec{r}(t)$; ou seja, se conhecemos $\vec{F}$ podemos, tipicamente, encontrar $\vec{v}$ e $\vec{r}$ por integração do campo vetorial de aceleração.

$\vec{F}$ pode ser função de $\vec{r}$, $\vec{v}$ e t (não necessariamente linear!)

$$\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Rightarrow \begin{cases} F_x(\vec{r},\vec{v},t) = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ F_y(\vec{r},\vec{v},t) = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ F_z(\vec{r},\vec{v},t) = m\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

- São 3 equações diferenciais de 2ª ordem acopladas.

Em princípio, se soubermos as condições de contorno, $\vec{r}(t_0)$ e $\vec{v}(t_0)$ (t_0 um tempo qualquer) podemos obter $\vec{r}(t)$ e $\vec{v}(t)$ p/ qualquer tempo.

$\boxed{\text{Problema 1-D}}$

$$|\vec{F}| = F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = ma \; ; \quad F(x, v_x, t)$$

ou seja

$$m\ddot{x} = F(x, v_x, t)$$

a) Caso mais simples: $F(t)$

EPA-1

19 / 0 / 19

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{F(t)}{m} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv' = \int_{t_0}^{t} \frac{F(t')}{m}\, dt'$$

p/ $v_0 = v(t_0)$

$$\boxed{v = v_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{F(t')}{m}\, dt'}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \therefore \quad \int_{x_0}^{x} dx' = \int_{t_0}^{t} \left[v_0 + \int_{t_0}^{t''} \frac{F(t')}{m}\, dt' \right] dt''$$

$$\boxed{x = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{t''} F(t')\, dt' \right] dt''}$$

Se $F(t) = F_0 = cte$

$$\int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{t''} F_0\, dt' \right] dt'' = \int_{t_0}^{t} F_0 (t'' - t_0)\, dt''$$

$\xi = t'' - t_0 \Rightarrow d\xi = dt'' \therefore$

$$\int_{0}^{t-t_0} F_0\, \xi\, d\xi = \frac{F_0}{2} \xi^2 \Big|_{0}^{t-t_0} = \frac{F_0 (t - t_0)^2}{2}$$

$$\boxed{x = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{F_0}{2m} (t - t_0)^2}$$

TAMOIO

b) Força que depende da velocidade explicitamente

→ Viscosidade ou força de arrasto.

→ Natureza da força: eletromagnética

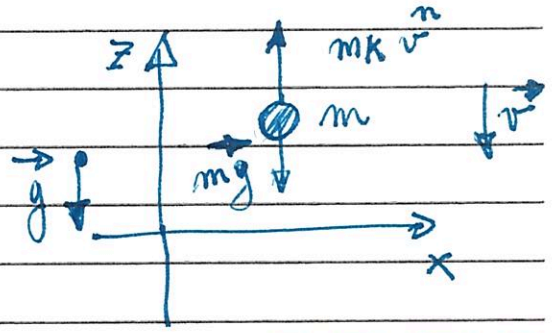
→ $F \propto v^n$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F(v)}{m} \Rightarrow \frac{dv}{F(v)} = \frac{dt}{m}$$

$$\boxed{\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)} = \frac{(t-t_0)}{m}}$$

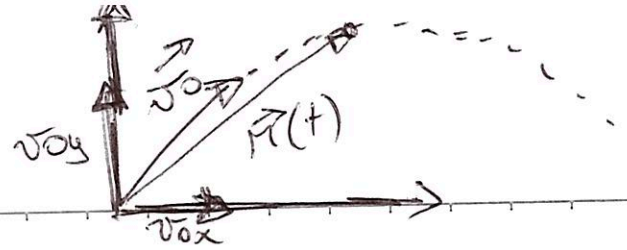
Exemplo 2D: Projéteis com resistência do ar:

$$\vec{F} = m\vec{g} - mkv^n\hat{v}$$



Para baixas velocidades, a constatação experimental é que $F \propto v^1$ (ARRASTE VISCOSO SEM TURBULÊNCIA)

Atenção com a escolha dos sinais!



$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\,\hat{z} - b\frac{d\vec{r}}{dt}$$

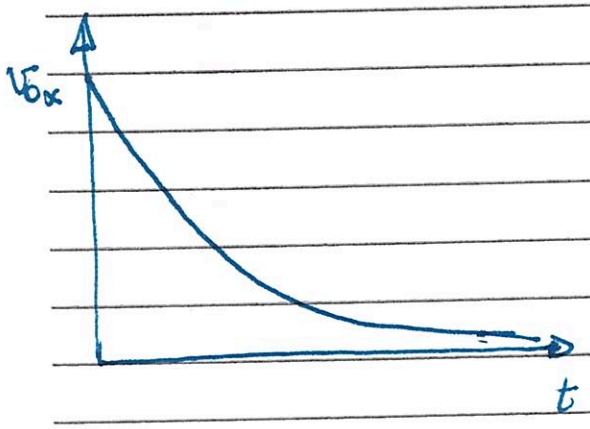
$$\left\{\begin{array}{l} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -b\dfrac{dx}{dt} \\[2ex] m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -mg - b\dfrac{dz}{dt} \end{array}\right.$$

Neste caso as eq. estão desacopladas!!

Resolvendo na direção $\underline{x}$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x}\frac{dv_x'}{v_x'} = -\frac{b}{m}\int_{t_0}^{t}dt \Rightarrow \ln v_x'\Big|_{v_0}^{v_x} = -\frac{b}{m}(t-t_0) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v_x}{v_{0x}} = e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)} \Rightarrow \boxed{v_x = v_{0x}\,e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}}$$



$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x}\,e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}$$

$$x - x_0 = v_{0x}\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{b}{m}(t'-t_0)}dt'$$

$$\xi = t' - t_0 \Rightarrow d\xi = dt'$$

$$\therefore\ x = x_0 + v_{0x}\int_0^{t-t_0} e^{-\frac{b}{m}\xi}d\xi \Rightarrow x = x_0 - \frac{m}{b}v_{0x}\left[e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)} - 1\right]$$

ou $$\boxed{x = x_0 + \frac{v_{0x}\, m}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}\right)}$$

Resolvendo p/ z:

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{b}{m} v_z$$

$$v_z' = -g - \frac{b}{m} v_z \Rightarrow \frac{dv_z'}{dt} = -\frac{b}{m}\frac{dv_z}{dt}$$

$$\int_{v_{0z}'}^{v_z'} \frac{dv_z''}{v_z''} = -\frac{b}{m}\int_0^{t-t_0} dt'$$

$$v_z' = v_{0z}' \, e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}$$

$$\therefore -g - \frac{b}{m} v_z = \left(-g - \frac{b}{m} v_{z0}\right) e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}$$

$$v_z = -\frac{gm}{b} - \left(-\frac{mg}{b} - v_{z0}\right) e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}$$

$$\boxed{v_z = \left(\frac{mg}{b} + v_{z0}\right) e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{b}}$$

p/ $t \to \infty$ $\boxed{v_z \approx -\frac{mg}{b}}$ = Velocidade Terminal

Tudo está correto?
Teste:

$$F_{zT} = -mg - b\,v_T$$

$$F_{zT} = -mg - \cancel{b}\left(-\frac{mg}{\cancel{b}}\right) = -mg + mg = \underline{\underline{0}}\ //$$

Na velocidade terminal, a resultante de forças na direção z deve ser <u>nula</u>! (E realmente é!)

p/ tempos muito curtos (início do movimento):

Analisamos a exp. de velocidades como uma série de potências. Neste caso vamos usar a <u>Série de Taylor</u>.

$f(x)$ calculado próximo de $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\,(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)\,(x - x_0)^2}{2!} + \cdots$$

Seja $f(x) = e^{-ax}$ p/ $x_0 = 0$

$$e^{-ax} = 1 - \frac{ax}{1!} + \frac{a^2x^2}{2!} - \frac{a^3x^3}{3!} + \cdots$$

$$v_z = \left(\frac{mg}{b} + v_{z_0}\right)\left[1 - \frac{bt}{m} + \frac{b^2}{2m^2}t^2 + \cdots\right] - \frac{mg}{b}$$

Por simplicidade vamos considerar $v_{z0} = 0$

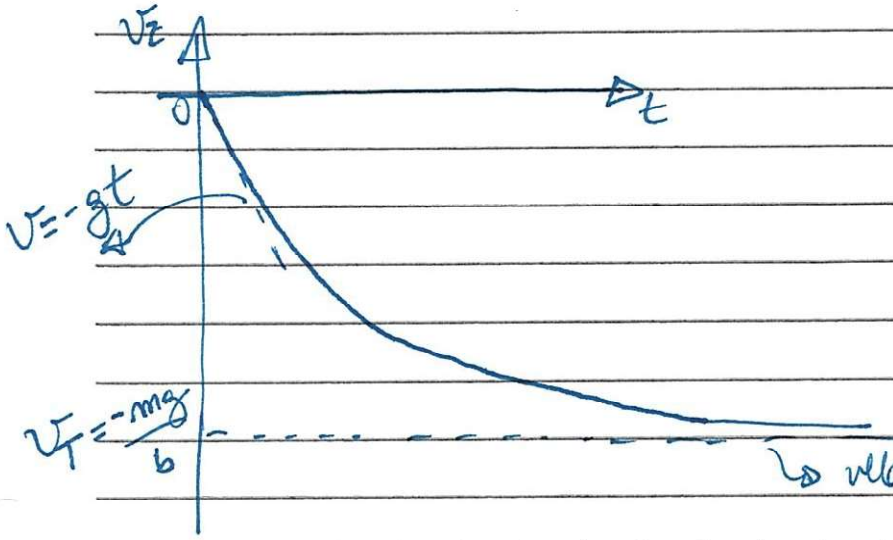
$$v_z = \cancel{\frac{mg}{b}} - gt + \frac{1}{2}\frac{bg}{m}t^2 + \dots \cancel{-\frac{mg}{b}}$$

$$v_z \simeq -gt + \frac{1}{2}\frac{bg}{m}t^2 + \dots$$

p/ o caso em que $t^2 \ll \frac{m}{bg}$ o segundo termo tende a zero mais rápido e podemos desprezá-lo ∴

$\boxed{v_z \simeq -gt}$ ⇝ (Equivalente ao caso de desprezar a resistência do ar no início do movimento.)

Isto é fisicamente bastante razoável, pois logo no início, a velocidade é baixa e desta forma o módulo da força de arrasto é desprezível.



Integrando $v_z = \left(\frac{mg}{b} + v_{z0}\right) e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{b}$

$$\boxed{z(t) = z_0 + \left(\frac{m^2 g}{b^2} + \frac{m}{b} v_{z0}\right)\left(1 - e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}\right) - \frac{mg}{b}(t-t_0)}$$

Caso particular de condição de contorno:

$t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $z_0 = 0$ (para facilitar os contas!)

$x(t) = \frac{m v_{x0}}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right) \Rightarrow$ isolando $\boxed{t = -\frac{m}{b} \ln\left(1 - \frac{xb}{m v_{x0}}\right)}$

$$z(t) = \left(\frac{m^2 g}{b^2} + \frac{m v_{z0}}{b}\right)\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) - \frac{mg}{b} t$$

Isolando t podemos encontrar a equação da trajetória no plano xz

$$\boxed{z = \left(\frac{mg}{b v_{x0}} + \frac{v_{z0}}{v_{x0}}\right) x + \frac{m^2 g}{b^2} \ln\left[1 - \frac{xb}{m v_{0x}}\right]}$$

6

Como examinar o caso onde a resistência do ar é pequena, através do valor de b ou quando a distância x é muito pequena

Ou seja; quando $\boxed{\frac{bx}{m v_{x0}} \ll 1}$

Expandindo a expressão em $\ln(1-\xi)$ p/ $\xi \ll 1$

teremos, ou seja $\xi \to 0$:

$$\boxed{\ln(1-\xi) = -\xi - \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} - \dots}$$ série de Taylor.

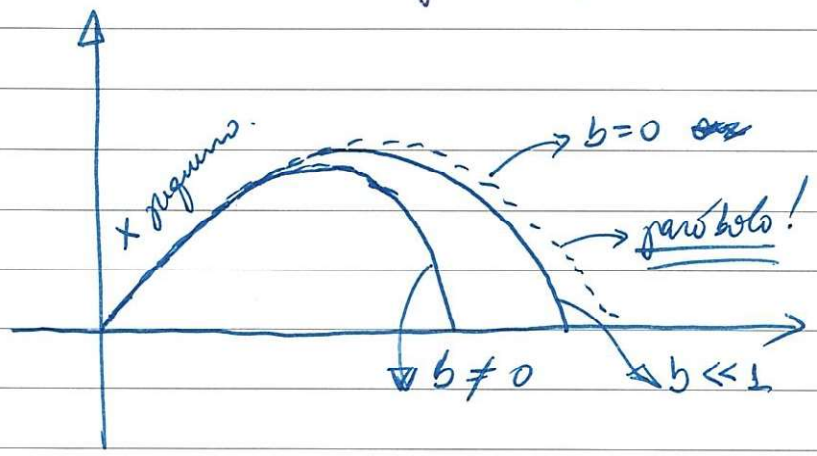
$$z = \left(\frac{mg}{bv_{x0}} + \frac{v_{z0}}{v_{x0}}\right)x + \frac{m^2 g}{b^2}\left[\overbrace{-\frac{xb}{mv_{0x}}}^{\xi} - \frac{1}{2}\frac{x^2b^2}{m^2v_{0x}^2} - \frac{1}{3}\frac{x^3b^3}{m^3v_{0x}^3} - \dots\right]$$

$$\therefore \boxed{z \cong \cancel{\frac{mgx}{bv_{x0}}} + \frac{v_{z0}}{v_{x0}}x - \cancel{\frac{mgx}{bv_{x0}}} - \frac{gx^2}{2v_{0x}^2} - \frac{1}{3}\frac{bg}{mv_{0x}^3}x^3 - \dots}$$

$$\therefore \boxed{z \cong \frac{v_{z0}}{v_{x0}}x - \frac{gx^2}{2v_{0x}^2} - \frac{1}{3}\frac{bg}{m}\frac{x^3}{v_{0x}^3} - \dots}$$

↳ note esta é uma série de potências de z como função de x

Note que os dois primeiros termos descrevem uma parábola. Ou seja p/ x muito pequeno, ou o início da trajetória, esta segue uma parábola. Ou o mesmo que dizer se $b=0$!



Alcance: Se realmente desprezamos a correção de ordem x^3,

ficamos com: $z=0$ solução trivial (origem).

ou $0 = \frac{v_{z0}}{v_{x0}}x - \frac{gx^2}{2v_{0x}^2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2v_{x0}v_{z0}}{g}}$

Podemos usar métodos perturbativos e corrigir um pouco melhor este resultado

$$x_{MAX} \cong \frac{2 v_{x0} v_{z0}}{g} - \frac{2}{3}\frac{b}{v_{x0}} x_{MAX}^2 \quad \ldots$$ (veja Eq. 2.46 a 2.50 do livro)

Como $x_{MAX} = \frac{2 v_{x0} v_{z0}}{g}$ expressão conhecida p/ $b=0$

$$\boxed{x_{MAX} = \frac{2 v_{x0} v_{z0}}{g} - \underbrace{\frac{8}{3}\frac{b v_{z0}^2}{mg^2} v_{x0}}}$$

Correção de 1ª ordem p/ a resistência do ar.

Veja o exemplo da figura 2.8 do livro

Um problema mais complexo que inclui o vento:

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\hat{z} - b(\dot{\vec{r}} + \vec{v}_W)$$