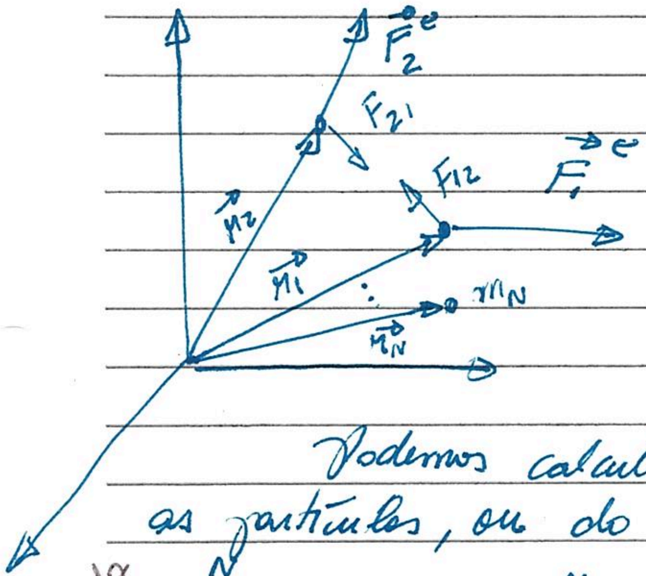
Capítulo 4 - Symon

Generalização das Leis de Conservação p/ Sistemas de Muitas partículas e Corpo Rígido



$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^e + \sum_j \vec{F}_{ij}$$

ou

$$\boxed{\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^e + \sum_j \vec{F}_{ij}} \quad (1)$$

Podemos calcular o momento linear de todas as partículas, ou do sistema como uma soma:

Somando (1)

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i}_{\vec{P}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^e + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}}_{\vec{F}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}}$$ onde $\vec{F}$ é a resultante como já vimos!

Note que pela 3ª Lei, as forças de ação e reação de uma partícula sobre a outra, são forças internas do sistema e anulam-se par a par.

$$\boxed{\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}} \quad \therefore \quad \boxed{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} \vec{F}_{ij} = 0}$$

Note que pela 3ª Lei de Newton, temos condição suficiente p/ demonstrar a Lei de Conservação do Momento linear.

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}}$$

A conservação do momento linear é mais geral que a 3ª lei de Newton. Em princípio, não necessitamos dizer que as partículas interagem aos pares. Podemos admitir somente que as forças internas não realizem trabalho no caso de cada partícula deslocar de uma distância $\delta\vec{r}$ (deslocamento virtual).

$$\delta W_k = \vec{F}_k^{int} \cdot \delta\vec{r} \qquad \text{(de uma partícula)}$$

$$\delta W = \sum_k \delta W_k = \delta\vec{r} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{int} \right)$$

Supondo que $\delta W = 0$ então:

$$\delta\vec{r} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{int} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_k \vec{F}_k^{int} = 0}$$

Já que $\delta\vec{r}$ não é nulo por hipótese!

Esta suposição vai além da 3ª Lei. A distribuição das várias espécies de energia no interior do sistema permanecerá constante pois, não haverá trabalho devido às forças internas.

Podemos escrever este resultado em termos da posição e velocidade do Centro de Massa do sistema:

$$M\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \quad \text{onde} \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \quad e$$

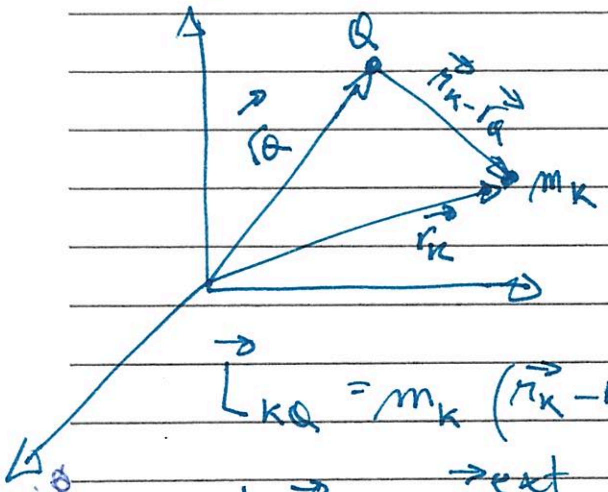
$$\boxed{\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}$$ ou $$\boxed{\begin{aligned} X &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i ; \\ Y &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i y_i ; \\ Z &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i z_i \end{aligned}}$$

$$\vec{P} = \frac{d}{dt}\left(M\vec{R}\right) = M\dot{\vec{R}} = M\vec{V}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)} = M\ddot{\vec{R}}}$$

Conclusão Importante: O C.M. de um sistema de partículas move-se como uma única partícula, cuja massa é a massa total do sistema, submetida a uma força igual à Força externa Resultante que age sobre o sistema.

Conservação do Momento Angular em um Sist. de Partículas



$$\vec L_{KQ} = (\vec r_K - \vec r_Q) \times \vec P_{KQ}$$

$$\vec P_{KQ} = m_K \left(\dot{\vec r}_K - \dot{\vec r}_Q\right)$$

$$\vec L_{KQ} = m_K (\vec r_K - \vec r_Q) \times (\dot{\vec r}_K - \dot{\vec r}_Q) \qquad \text{I}$$

II serão necessários depois

$$\frac{d}{dt}\vec p_K = \vec F_K^{ext} + \vec F_K^{int}$$

$$(\vec r_K - \vec r_Q) \times \frac{d\vec p_K}{dt} = (\vec r_K - \vec r_Q) \times \vec F_K^{ext} + (\vec r_K - \vec r_Q) \times \vec F_K^{int}$$

Derivando $\vec L_{KQ}$ temos:

derivo o primeiro termo de I

$$\frac{d\vec L_{KQ}}{dt} = (\vec r_K - \vec r_Q) \times \frac{d\vec p_K}{dt} + \underbrace{m_K (\dot{\vec r}_K - \dot{\vec r}_Q) \times (\dot{\vec r}_K - \dot{\vec r}_Q)}_{0} - m_K (\vec r_K - \vec r_Q) \times \ddot{\vec r}_Q$$

sub. por II

$$\text{III} \qquad \frac{d\vec L_{KQ}}{dt} = (\vec r_K - \vec r_Q) \times \vec F_K^{ext} + (\vec r_K - \vec r_Q) \times \vec F_K^{int} - m_K (\vec r_K - \vec r_Q) \times \ddot{\vec r}_Q$$

$$\underbrace{\vec L_Q = \sum_{K=1}^{N} \vec L_{KQ}}_{\text{Momento angular total em torno de Q}} \; ; \quad \underbrace{\vec N_Q = \sum_{K=1}^{N} (\vec r_K - \vec r_Q) \times \vec F_K^{ext}}_{\text{Torque total em torno do ponto Q.}}$$

Usar (III)

$$\therefore \frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{N}_Q + \sum_{k=1}^{N} (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^{int} - \underbrace{\sum m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q}_{M(\vec{R} - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q}$$

O último termo se anula quando $\ddot{\vec{r}}_Q = 0$ ou quando $\ddot{\vec{r}}_Q \parallel (\vec{R} - \vec{r}_Q)$

Note que: se $R_Q = R$ Também zero!

Admitindo agora que $\sum_{k=1}^{N} (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^{int} = 0$

Temos: $\boxed{\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{N}_Q}$

$\vec{L}_Q = cte$ se não existe torque externo ao sistema!

p/ que $\sum (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^{int} = 0$ temos que a

3ª Lei na forma forte!

$\vec{F}_{k-l}^{int} = -\vec{F}_{l-k}^{int}$ (E age sobre a linha que une estas partículas).

Ou seja, uma partícula só pode atrair ou repelir a outra!

$$\sum_{k=1}^{N} (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^{int} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l \neq k} (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{l \to k}^{int}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{k-1} \left[(\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{l \to k}^{int} + (\vec{r}_l - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{k \to l}^{int} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{k-1} \left[(\vec{r}_k - \vec{r}_Q) - (\vec{r}_l - \vec{r}_Q) \right] \times \vec{F}_{l \to k}^{int}$$

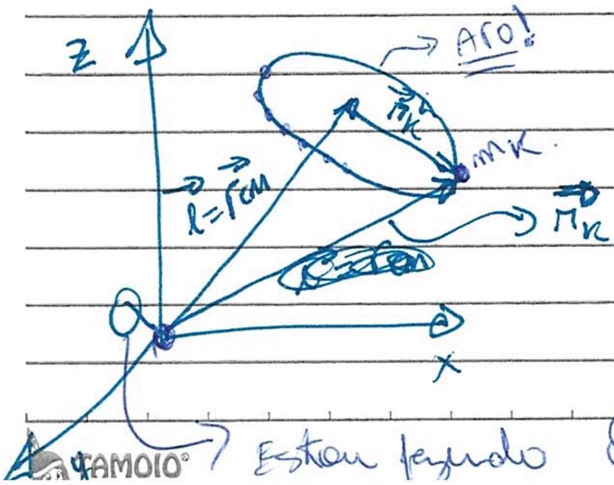
$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{k-1} (\vec{r}_k - \vec{r}_l) \times \vec{F}_{l \to k}^{int}$$

$$\boxed{(\vec{r}_k - \vec{r}_l) \ // \ \vec{F}_{l \to k}^{int}}$$

Desta forma mostramos que nesta ordem

$$\boxed{\sum (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^{int} = 0}$$

<u>Exemplo</u>: <u>Giroscópio</u>: Considere a <u>origem</u> = Q



$\vec{r}_k = \vec{R}_{cm} + \vec{r}_k'$

$\vec{L}_Q = \sum (\vec{r}_k \times \vec{p}_k)$

$\vec{L}_Q = \sum (\vec{R}_{cm} + \vec{r}_k') \times m_k (\dot{\vec{R}}_{cm} + \vec{v}_k')$

Estou pegando Q ser a origem!!

$$= \sum_k m_K \left(\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{r}_K^{\,i} \times \vec{V}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times \vec{v}_K^{\,i} + \vec{r}_K^{\,i} \times \vec{v}_K^{\,i} \right)$$

$$\vec{L}_Q = \sum_k m_K \left(\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} \right) + \sum_K \left(m_K \vec{r}_K^{\,i} \right) \times V_{CM} + R_{CM} \times \left(\sum m_K \vec{v}_K^{\,i} \right)$$
$$+ \sum \left(\vec{r}_K^{\,i} \times \vec{v}_K^{\,i} \right) m_K$$

Note que: $\sum_K m_K \vec{r}_K^{\,i} = 0$ pois é a definição da posição do centro de massa em relação ao centro de massa.

$\therefore \sum_K m_K \vec{v}_K^{\,i} = 0$ é a ~~velocidade~~ ~~o momento~~ velocidade do centro de massa em relação a ele mesmo!

Portanto os 2º e 3º termos são ZERO!

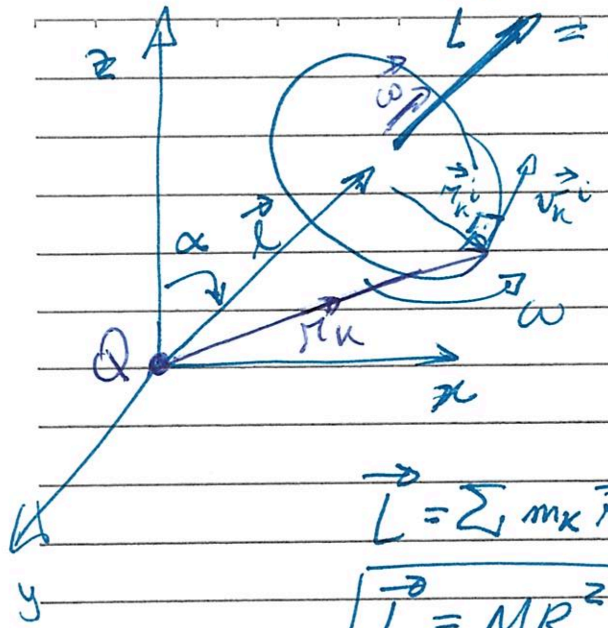
$$\vec{L}_Q = M \left(\vec{R}_{CM} \times \vec{V} \right) + \sum_{K=1}^{N} m_K \left(\vec{r}_K^{\,i} \times \vec{v}_K^{\,i} \right)$$

Note que na ausência de forças externas,

$M\vec{V} = \vec{P} = cte.$

O momento angular depende somente das coordenadas e das velocidades internas.

Vamos supor inicialmente que $\vec{P} = 0 \therefore$



$\vec{L} = \sum m_k (\vec{r}_k^{\,i} \times \vec{v}_k^{\,i})$

Lembrando que $\vec{v}_k^{\,i} = \vec{\omega} \times \vec{r}_k^{\,i}$ onde $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$ e representa a velocidade angular, temos:

$$\vec{L} = \sum_k m_k \vec{r}_k^{\,i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k^{\,i}) = \sum_k m_k (r_k^i)^2 \vec{\omega}$$

$$\boxed{\vec{L} = MR^2 \vec{\omega}}$$

Vamos agora olhar p/ a variação do momento angular no tempo:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{N}_Q$$

$$\vec{N}_Q = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{ext} = \sum_k \vec{r}_k \times (-m_k g)\hat{z}$$

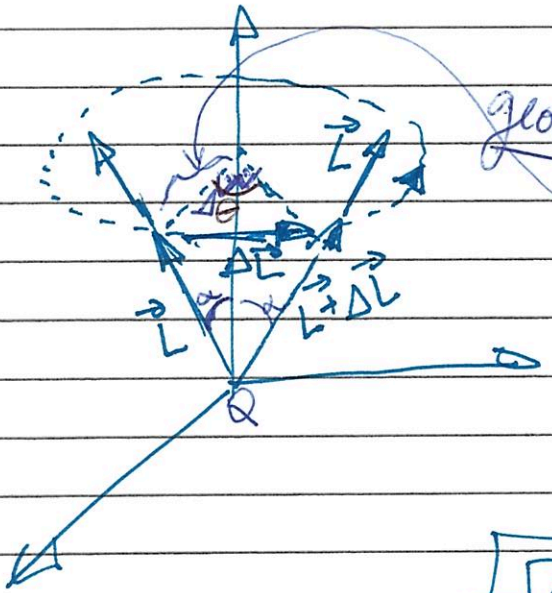
$$= \sum_k (\vec{r}_k m_k) \times g\hat{z} = -(M\vec{R}_{cm} \times g\hat{z}) = -\vec{R}_{cm} \times M\vec{g}$$

$$\therefore \quad \vec{N}_Q = -Mgl\,sen\alpha\,(\hat{l} \times \hat{z})$$

$$\hat{l} \times \hat{z} \perp \hat{L}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -Mgl\,sen\alpha\,(\hat{l} \times \hat{z})$$

Note que $d\vec{L}$ está na mesma direção que o torque $\vec{N}_Q$



$$|\Delta\vec{L}| = Mg\,l\,\text{sen}\,\alpha\,\Delta t$$

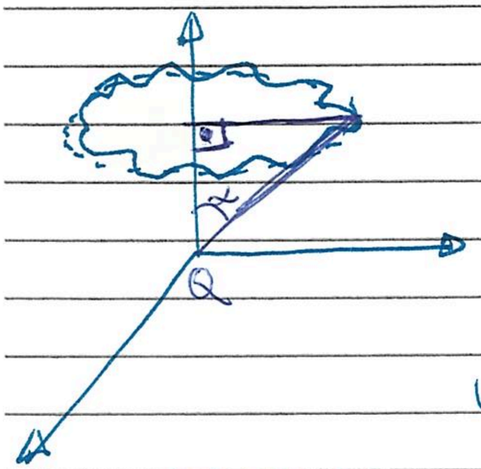
geométricamente

$$\Delta L = L\,\text{sen}\,\alpha\,\Delta\theta$$

$$Mg\,l\,\cancel{\text{sen}\,\alpha}\,\Delta t = L\,\cancel{\text{sen}\,\alpha}\,\Delta\theta$$

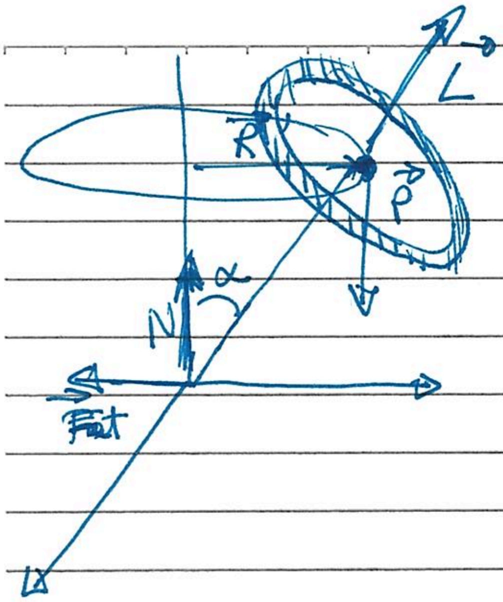
$$\therefore \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{Mg\,l}{L}$$

$$\boxed{\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{Mg\,l}{MR^2\omega} = \frac{g\,l}{R^2\omega}}$$



Se soltarmos o giroscópio a partir de um certo ângulo, veremos que o seu centro de massa oscila e será iniciado um movimento de precessão com velocidade angular Ω.

Este movimento dependerá da existência efetiva de atrito no ponto de apoio!



$$\vec{N} = \vec{P}$$

$$\vec{Fat} \leq \mu_e N$$

$$|\vec{Fat}| = M\,\Omega^2 R'$$ → Aceleração centrípeta!

$$\therefore \cancel{M}\,\Omega^2 R' \leq \mu_e \cancel{M} g$$

$$\therefore \boxed{\mu_e \geq \frac{\Omega^2 R'}{g}}$$

$$\mu_e \geq \frac{\Omega^2\, l \,\mathrm{sen}\,\alpha}{g}$$

$$\boxed{\alpha \leq \mathrm{arcsen}\left[\frac{g\,\mu_e}{\Omega^2 l}\right]}$$