Conservação de Energia

Em muitos casos a força sobre cada partícula pode depender somente da posição das partículas no sistema como:

$$\vec{F}_K = \vec{F}_K(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots \vec{r}_N) \; ; \quad K = 1, 2, 3, \ldots, N$$

$\vec{F}_K^{ext} \rightarrow$ depende somente de $\vec{r}_K$

$\vec{F}_K^{int} \rightarrow$ depende da posição relativa $(\vec{r}_K - \vec{r}_\ell)$

Eventualmente existe uma função potencial de forma que $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_N)$ e:

$$\vec{F}_{Kx} = -\frac{\partial V}{\partial x_K}, \quad \vec{F}_{Ky} = -\frac{\partial V}{\partial y_K}, \quad \vec{F}_{Kz} = -\frac{\partial V}{\partial z_K}$$

$$\therefore m_K \frac{dv_{Kx}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x_K} \; ; \quad m_K \frac{dv_{Ky}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial y_K} \; ; \quad m_K \frac{dv_{Kz}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial z_K}$$

multiplicando cada termo por v_{Ki} $\quad i = x, y, z$ temos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_K v_K^2\right) + \frac{\partial V}{\partial x_K} v_{xK} + \frac{\partial V}{\partial y_K} v_{yK} + \frac{\partial V}{\partial z_K} v_{zK} = 0$$

Somando p/ todas as partículas:

$$\frac{d}{dt}\sum_{K=1}^{N}\left(\frac{1}{2} m_K v_K^2\right) + \sum_{K=1}^{N} \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial x_K}\frac{dx_K}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_K}\frac{dy_K}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_K}\frac{dz_K}{dt}\right)}_{\frac{dV(x,y,z)}{dt}} = 0$$

note que $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

$\therefore \quad K = \sum \frac{1}{2} m_k v_k^2$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(K+V\right) = 0} \Rightarrow \boxed{K+V=E=cte}$$

Se as forças internas derivam de uma função energia potencial V, como escrito anteriormente, mas as forças externas não são; então o Teorema passa a ser escrito como:

$$\frac{d}{dt}\left(K+V\right) = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{ext} \cdot \vec{v}_k$$

Supondo agora que $F_k^{interno}$ seja a soma das forças devido às outras partículas e as ~~massas~~ mesmas dependem somente da posição relativa $(\vec{r}_k - \vec{r}_l)$

$$\therefore \vec{F}_k^{int} = \sum_{l \neq k} \vec{F}_{kl}^{int} (\vec{r}_k - \vec{r}_l)$$

Se for possível definir uma função potencial esta será:

$$V_{kl}(\vec{r}_{kl}) = \int \vec{F}_{kl}^{int}(\vec{r}_{kl}) \cdot d\vec{r}_{kl} \quad \text{onde } \vec{r}_{kl} = \vec{r}_k - \vec{r}_l$$

$\hookrightarrow$ A condição p/ isto valer será: $\boxed{\vec{\nabla}_{kl} \times \vec{F}_{kl}^{int} = 0}$

$$\therefore \vec{F}_{kl} = -\hat{x}\,\frac{\partial V(\vec{r}_{kl})}{\partial x_{kl}} - \hat{y}\,\frac{\partial V(\vec{r}_{kl})}{\partial y_{kl}} - \hat{z}\left(\frac{\partial V(\vec{r}_{kl})}{\partial z_{kl}}\right)$$

Note que: $V(\vec{r}_{kl}) = V(x_{kl}, y_{kl}, z_{kl}) = V(x_k - x_l, y_k - y_l, z_k - z_l)$

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial x_{kl}} = \frac{\partial V}{\partial x_k} = -\frac{\partial V}{\partial x_l}$$

$$\therefore \vec{F}^{int}_{kl} = -\hat{x}\,\frac{\partial V_{kl}}{\partial x_k} - \hat{y}\,\frac{\partial V_{kl}}{\partial y_k} - \hat{z}\,\frac{\partial V_{kl}}{\partial z_k}$$

Pela 3º lei $\quad \vec{F}^{int}_{kl} = -\vec{F}^{int}_{lk} = \hat{x}\,\frac{\partial V_{kl}}{\partial x_{kl}} + \hat{y}\,\frac{\partial V_{kl}}{\partial y_{kl}} + \hat{z}\,\frac{\partial V_{kl}}{\partial z_{kl}}$

$$\Rightarrow \vec{F}^{int}_{kl} = +\hat{x}\,\frac{\partial V_{kl}}{\partial x_l} + \hat{y}\,\frac{\partial V_{kl}}{\partial y_l} + \hat{z}\,\frac{\partial V_{kl}}{\partial z_l}$$

Deste modo:

$$\boxed{\begin{aligned} V^{int}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{k-1} V_{kl}(\vec{r}_k - \vec{r}_l) \\ \vec{F}^{int} &= -\hat{x}\,\frac{\partial V^{int}}{\partial x_k} - \hat{y}\,\frac{\partial V^{int}}{\partial y_k} - \hat{z}\,\frac{\partial V^{int}}{\partial z_k} \end{aligned}}$$

Note que se forem forças conservativas, como as forças centrais o são; então V^{int} se tornará e a V^{Ext} conservativa

e a energia total será $V^{int} + V^{Ext} = V$

$$\boxed{K + V = E = cte}$$

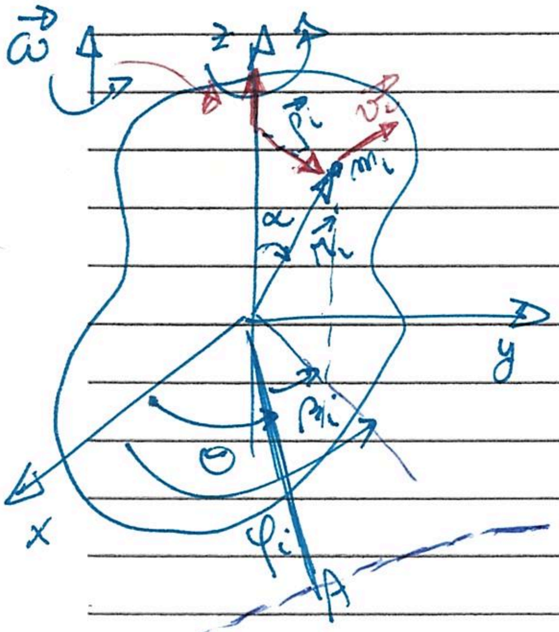
Havendo atrito interno ao sistema; por exemplo, forças dependendo da velocidade, então $K + V$ não é constante!

PENSE NO KER da F1

Pense em uma roda no espaço e seu eixo!

ou mais avançado (MARÉS!)

Corpo Rígido: Rotação em torno de um Eixo



$$\vec{L_z} = \sum_i \vec{\rho_i} \times \vec{p_i}$$

$$\vec{p_i} = m_i \vec{v_i} \quad \text{onde} \quad \vec{v_i} = \omega \times \rho_i$$

Note que $\vec{v_i} = \vec{\omega} \times \vec{r_i} = \underset{\rho_i}{\text{componente}}$

$$= \vec{\omega} \times \vec{\rho_i}$$

$$\therefore \vec{L_z} = \sum_i m_i (\vec{\rho_i} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho_i})$$

$$\vec{L_z} = \sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega}$$

onde $\omega = \frac{d\varphi_i}{dt}$

Note que $\frac{d\rho_i}{dt} \to 0$ p/ todo i pois é corpo rígido

Lembre do Prod. vetorial Triplo:

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

Isto é o mesmo que dizer que a velocidade relativa entre as partículas no corpo rígido é ZERO!

Basta portanto, definir como uma determinada linha A perpendicular ao eixo de rotação, que como função do tempo:

$$\omega = \frac{d\varphi_i}{dt} = \dot{\varphi}_i = \dot{\theta}$$

$$\therefore \vec{L}_Z = \left(\sum_i m_i \rho_i^2\right) \dot{\theta}\, \hat{\omega} \quad \text{ou} \quad \boxed{L_Z = I_Z \dot{\theta}}$$

onde $I_Z = \sum_i m_i \rho_i^2$ é o Momento de inércia em relação ao eixo $\underline{Z}$.

Para um corpo rígido podemos simplesmente escrever:

$$I_Z = \iiint_{(corpo)} \rho^2 \, dm \quad \text{onde} \quad dm = \rho' dV$$

ρ' é a densidade de massa.

Como consequência, a dinâmica de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo poderá ser descrita por:

TAMOIO®

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{N}_z$$

$$\frac{d}{dt}\left(I_z \dot{\theta}\right) = \vec{N}_z \Rightarrow \boxed{I_z \ddot{\theta} = N_z}$$

Podemos estudar todos os métodos do movimento retilíneo p/ o problema de rotação de uma forma análoga:

Mov. retilíneo		rotação em torno de um eixo.
posição : X	$\longrightarrow$	posição angular : θ
vel. : $v = \dot{x}$	$\longrightarrow$	veloc. angular : $\omega = \dot{\theta}$
aceleração : $a = \ddot{x}$	$\longrightarrow$	acel. angular : $\alpha = \ddot{\theta}$
Força : $\vec{F} = F_x \hat{x}$	$\longrightarrow$	Torque : $\vec{N}_z$
massa : m	$\longrightarrow$	Momento de Inércia : I_z
Energia potencial: $V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$	$\longrightarrow$	$V(\theta) = -\int_{\theta_s}^{\theta} N_z(\theta)\,d\theta$
$F(x) = -\frac{dV}{dx}$	$\longrightarrow$	$N_z(\theta) = -\frac{dV}{d\theta}$

Energia cinética

$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

Lembre-se de incluir a K_{CM} se for o caso ($V_{CM} \neq 0$)

$K_R = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \sum_k \frac{1}{2} m_k (\rho_k \dot{\theta})^2$

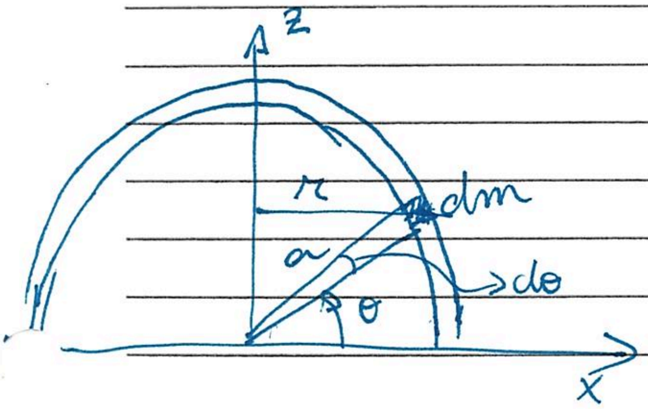
$K_R = \frac{1}{2} \left(\sum_k m_k \rho_k^2 \right) \dot{\theta}^2$

$K_R = \frac{1}{2} I_Z \dot{\theta}^2$ ou $\frac{1}{2} I_Z \omega_Z^2$

Momento linear: $p = m\dot{x}$ Momento angular: $L = I_Z \dot{\theta}$

Exemplos simples p/ cálculo de Momento de Inércia

Exemplo 1



$I_Z = ?$

$I_Z = \int r^2 \, dm$

$I = \int a^2 \cos^2\theta \, dm$

$dm = \lambda a \, d\theta$

onde $\lambda = \frac{M}{L}$ $L = \pi a$

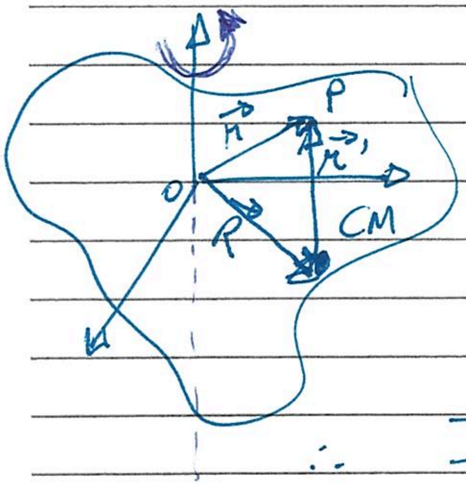
$$I = \int_0^{\pi} a^2 \cos^2\theta \, \frac{M \cancel{a}}{\pi \cancel{a}} \, d\theta = \frac{a^2 M}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta \Rightarrow I = \frac{a^2 M}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2\theta \, d\theta \right\}$$

$$2\theta = \alpha \quad d\theta = \frac{d\alpha}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2\theta \, d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos\alpha \, d\alpha = 0$$

$$I_z = \frac{a^2 M}{\cancel{\pi}} \frac{\cancel{\pi}}{2} \Rightarrow \boxed{I_z = \frac{a^2 M}{2}}$$

Teorema dos Eixos Paralelos



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

$$x^2 + y^2 = (x' + X)^2 + (y' + Y)^2$$

$$= x'^2 + y'^2 + X^2 + Y^2 + 2Xx' + 2Yy'$$

$$\therefore \quad I_0 = \int (x^2 + y^2) \rho \, dV$$

$$I_0 = \int (x'^2 + y'^2) \rho \, dV + (X^2 + Y^2) \int \rho \, dV + 2X \underbrace{\int x' \rho \, dV}_{0} + 2Y \underbrace{\int y' \rho \, dV}_{0}$$

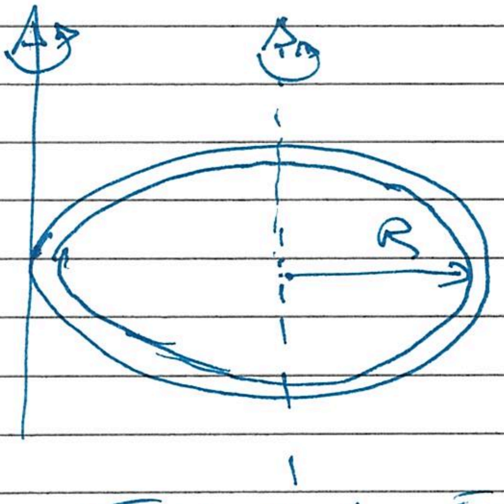
$\int x' \rho \, dV$ é a definição de X'_{cm} que é ZERO!

o mesmo p/ Y'_{cM}.

$$\therefore \boxed{I_0 = I_{CM} + h^2 M} \qquad h^2 = Y^2 + X^2 = R^2$$

distância entre C.M. e o eixo que passa por $\underline{O}$, paralelo ao eixo que passa pelo C.M.

Exemplo 2|

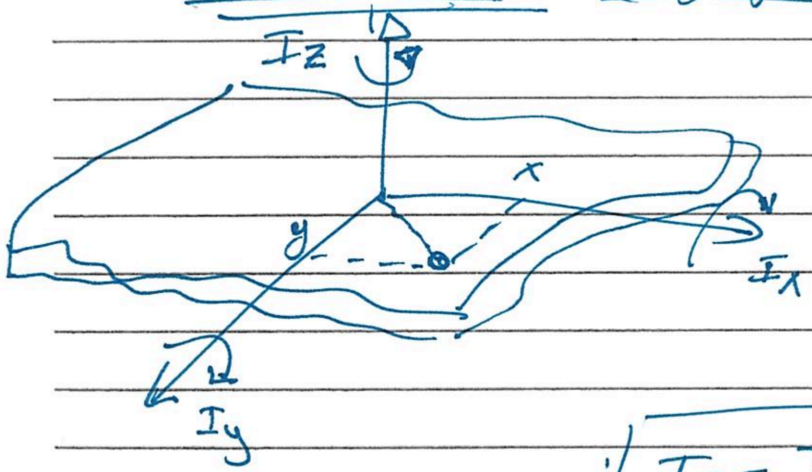


$I_O = I_{cm} + MR^2$

$I_{cm} = MR^2$

$\therefore \boxed{I_O = 2MR^2}$

Teorema dos Eixos perpendiculares



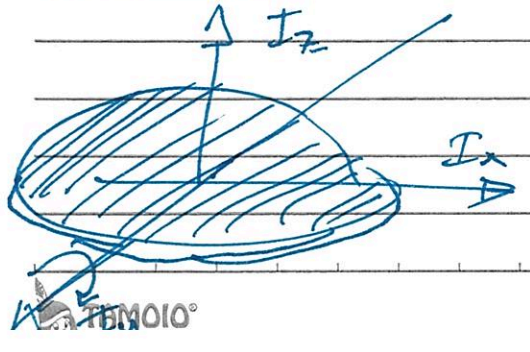
$I_z = \int \rho \, dV \, (x^2 + y^2)$

$I_z = \underbrace{\int x^2 \rho \, dV}_{I_y} + \underbrace{\int y^2 \rho \, dV}_{I_x}$

$\therefore \boxed{I_z = I_x + I_y}$

Só vale p/ figuras planas ou simétricas na direção $\underline{z}$

Exemplo 3 //



Calculo primeiro I_z

$I_z = \int r^2 \, dm$

$dm = \sigma \, 2\pi r \, dr \qquad \sigma = \dfrac{M}{\pi R^2}$

$I_z = \int_0^R r^2 \dfrac{M}{\cancel{\pi} R^2} \, 2\cancel{\pi} r \, dr = \dfrac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 \, dr$

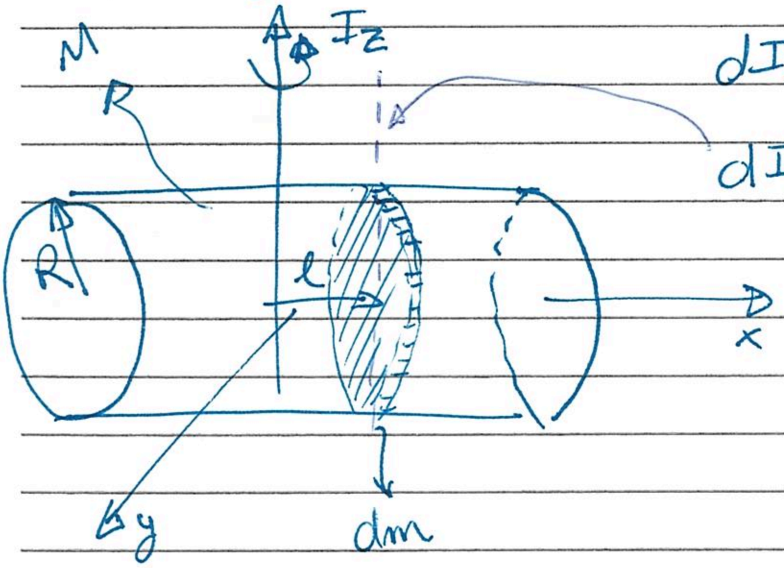
$$I_z = \frac{2M}{R^2}\frac{R^4}{4}\Big|_0^R \Rightarrow \boxed{I_z = \frac{MR^2}{2}}$$

$\therefore$ I_x ou I_y $\therefore$ $I_z = I_x + I_y$

$$\frac{MR^2}{2} = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y$$

$$\boxed{I_x = I_y = \frac{MR^2}{4}}$$

Exemplo 4: Vamos calcular algo mais complexo com a ajuda dos dois Teoremas:



$$dI_z = dI_{CM} + dm\, l^2$$

$$dI_{CM} = \frac{R^2 dm}{4} = dI_{CM_z}$$

Mostrando:

$$dI_{CM_z} = dI_{CM_y}$$

$$dI_{CM_x} = \frac{dm\, R^2}{2}$$

$$\underbrace{dI_{CM_z} + dI_{CM_y}} = dI_{CM_x}$$

$$2\, dI_{CM_z} = \frac{dM R^2}{2}$$

$$dI_{CM_z} = \frac{dM\, R^2}{4}$$

$dm = \lambda \, dl \qquad \lambda = \frac{M}{L}$

$$I_z = \int dI_z = \int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} \frac{R^2}{4} \lambda \, dl + \int_{-L/2}^{L/2} \lambda l^2 \, dl$$

$$I_z = \frac{R^2}{4} \lambda \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \right] + \frac{\lambda l^3}{3} \Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} =$$

$$I_z = \frac{R^2 M \cancel{L}}{4 \cancel{L}} + \frac{M 2 L^3}{3 L 8} = \boxed{\frac{MR^2}{4} + \frac{ML^2}{12}}$$