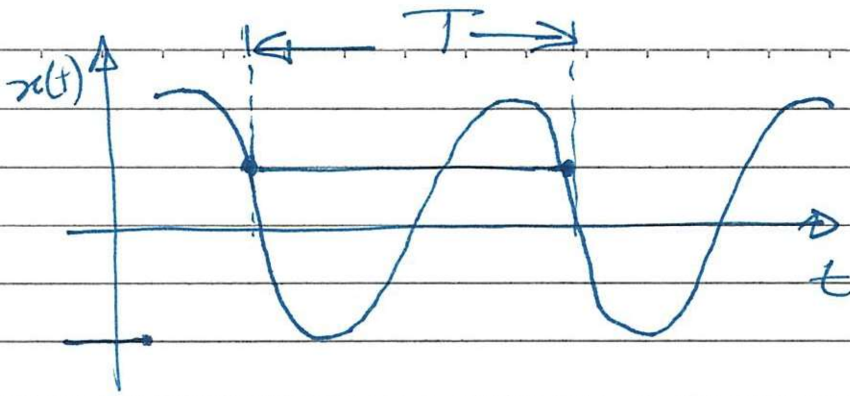


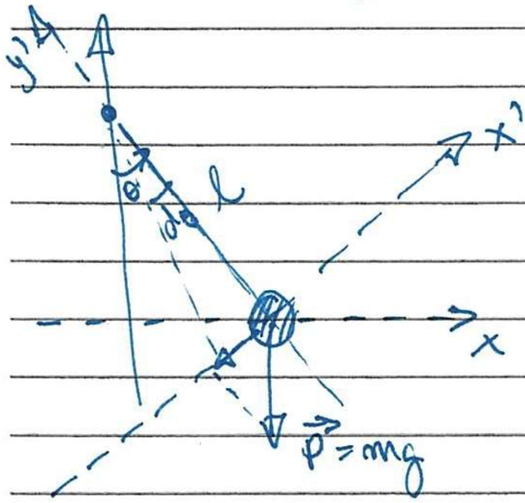
A função $x(t)$ é periódica $x(t+nT) = x(t)$

$\therefore C \sin[\omega_0(t+nT) - \delta] = C \sin[\omega_0 t - \delta]$

$\omega_0 nT = n 2\pi \quad \therefore \omega_0 T = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$ (s)

$f_0 \equiv \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ $\omega_0 \to$ rad/s (Hz)

Exemplo: Pequenas oscilações de um pendulo simples.



$dx' = +l\, d\theta$ $\quad l = cte$!!!!

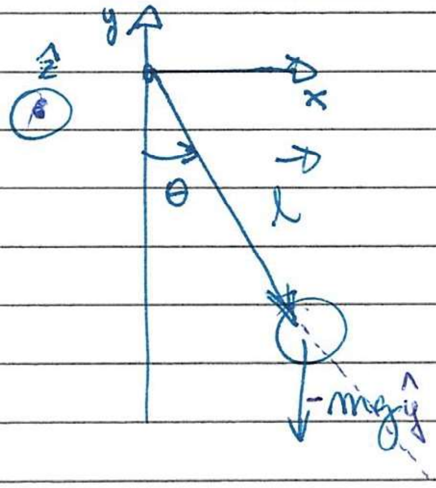
$\frac{d^2x'}{dt^2} = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$

$\cancel{m}\frac{d^2x'}{dt^2} = F_{x'} = -\cancel{m}g \operatorname{sen}\theta$

$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \operatorname{sen}\theta$

$\therefore \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta = 0}$

Podemos ainda considerar o torque e a variação do momento angular em torno do eixo.



$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{l} \times mg(-\hat{y}) = -lmg\,\text{seno}\,\hat{z}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha} = I\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{z} = \underbrace{ml^2}_{I}\underbrace{\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\ddot{\theta}}\hat{z}$$

$$\cancel{m}l^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = -\cancel{l}\cancel{m}g\,\text{sen}\theta$$

$$\therefore \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\theta = 0}$$

Se considerarmos agora o caso de pequenas oscilações ou seja $\theta \approx \text{sen}\theta$ e expandir a função

senθ em série de Taylor temos p/ o primeiro termo não nulo.

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$ mesma solução que o caso anterior p/ $F = -kx$

neste caso $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$

Note que este pendulo independe da massa. Mas em um pendulo físico, existe uma dependência significativa na forma do objeto, ou seja em

I ou $I = mk^2$ k é o raio de giro!

Voltaremos a isto mais tarde...

Introdução às Equações Diferenciais Lineares

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x + \dots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = b(t)$$

Se $b(t) = 0 \Rightarrow$ Então a Equação é Homogênea

Nesta caso:

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} a_j(t)\frac{d^j x}{dt^j} = 0}$$

Teorema 1: Se $x_1(t)$ é solução; $x = C\,x_1(t)$ também será solução p/ C uma constante.

Teorema 2: Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções, então $x_1(t) + x_2(t)$ também serão.

$\Downarrow$

Demonstração:

$x(t) = A\,x_1(t) + B\,x_2(t)$

$$\sum_j a_j(t)\frac{d^j}{dt^j}\left[x(t)\right] = \sum_j a_j(t)\frac{d^j}{dt^j}\left[A\,x_1(t) + B\,x_2(t)\right]$$

$$= \underbrace{A \sum_j a_j(t) \frac{d^j}{dt^j} x_1(t)}_{0} + \underbrace{B \sum_j a_j(t) \frac{d^j}{dt^j} x_2(t)}_{0} = 0$$

porque x_i são soluções

Se $a_j(t) = a_j$ constantes, então existe uma solução segundo o Método de Euler.

$x(t) = e^{pt}$

$$\therefore \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{d^j}{dt^j}\left(e^{pt}\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, p^j\, e^{pj} = 0$$

$$\therefore \sum_{j=0}^{n} a_j\, p^j = 0 \Rightarrow \boxed{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0}$$

Polinômio de ordem n e p são as raízes do mesmo.

Possibilidades:

1 Encontramos n raízes, $p_1, p_2, p_3 \dots$ e temos portanto n soluções linearmente independentes.

A solução geral será:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j e^{p_j t}$$

A_j serão constantes arbitrárias obtidas pelas n condições iniciais de contorno.

② Algumas raízes têm multiplicidade k, ou seja, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-k}$. Neste caso, temos as soluções q (k vezes) e p/ as k raízes q, teremos

$e^{qt}, te^{qt}, t^2 e^{qt}, \dots, t^k e^{qt}$ como soluções independentes lineares.

③ Uma raiz é 0; então a solução será

$t^0, t^2, \dots, t^k$

No caso da 2ª Lei de Newton, restringimos à $m=2$

__Caso geral:__ $a_2 \dfrac{d^2x}{dt^2} + a_1 \dfrac{dx}{dt} + a_0 x = b(t)$

Homogênea: $a_2 \dfrac{d^2x}{dt^2} + a_1 \dfrac{dx}{dt} + a_0 x = 0$

→ Resolvendo primeiramente este caso pelo método de Euler:

Solução $x(t) \sim e^{pt}$

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

$$p = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}}{2a_2}$$

Caso 1 : Temos 2 raízes:

$$x(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$$

Caso 2 : Duas raízes iguais $\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 0$

$$x(t) = Ae^{pt} + Bt\,e^{pt}$$

Caso 3 : Temos uma raiz $= 0$

$$x(t) = Ae^{pt} + Be^{0t}$$

Note que este é o caso onde $a_0 = 0$ e a equação pode ser integrada:

$$\boxed{a_2 \frac{d^2x}{dt^2} = -a_1 \frac{dx}{dt}} \Rightarrow \boxed{\frac{a_2}{a_1}\frac{dv}{dt} = v}$$

Caso particular de 1 quando p_1 e p_2 são complexos $\Delta < 0$

na verdade $p_1 = p_2^*$ (complexo conjugado)

$$p_1 = \xi_1 + i\chi$$
$$p_2 = \xi_1 - i\chi$$

Este é exatamente o caso do oscilador harmônico simples:

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow x = e^{pt}$$

$$mp^2 + k = 0 \Rightarrow \boxed{p = \pm\sqrt{\frac{-k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0}$$

$$\therefore \boxed{x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}}$$

é um número complexo!! Mas precisamos de $x(t)$ real.

Se A e B forem complexos, então teremos uma possibilidade da solução ser real.

Na verdade, é possível provar que $A = B^*$

$$\therefore A = \frac{C}{2}e^{i\delta} \quad e \quad B = \frac{C}{2}e^{-i\delta}$$

$$x(t) = \frac{C}{2}e^{i(\omega_0 t + \delta)} + \frac{C}{2}e^{-i(\omega_0 t + \delta)}$$

Se lembrarmos que $\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

$$\therefore \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\therefore \boxed{x(t) = C\cos(\omega_0 t + \delta)}$$

↳ C e δ dependem de x_0 e v_0

No caso de uma equação **NÃO HOMOGÊNEA**

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b(t)$$

Busca-se a solução particular $x_p(t)$. A solução geral será então a combinação da solução homogênea e a particular

$$\boxed{x(t) = A e^{p_1 t} + B e^{p_2 t} + x_p(t) \quad p/\ p_1 \neq p_2}$$

Oscilador harmônico Amortecido

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

Exemplo: (Sistema massa mola com dissipação)

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Solução $e^{pt} \Rightarrow mp^2 + bp + k = 0$

$$\therefore p = \frac{-b}{2m} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4km}}{2m} = \frac{-b}{2m} \pm \left[\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}\right]^{1/2}$$

Vamos definir $\gamma = \frac{b}{2m}$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\therefore \boxed{p = -\gamma \pm \left[\gamma^2 - \omega_0^2\right]^{1/2}}$$

$\hookrightarrow$ solução p/ a equação $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

TAMOIO®