No caso de uma equação NÃO HOMOGÊNEA

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b(t)$$

Busca-se a solução particular $x_p(t)$. A solução geral será então a combinação da solução Homogênea e a particular

$$\boxed{x(t) = A e^{p_1 t} + B e^{p_2 t} + x_p(t) \quad p/ \; p_1 \neq p_2}$$

Oscilador harmônico Amortecido

$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$ Exemplo: (Sistema massa mola com dissipação)

$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

Solução $e^{pt} \Rightarrow mp^2 + bp + k = 0$

$$\therefore p = \frac{-b}{2m} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4km}}{2m} = \frac{-b}{2m} \pm \left[\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}\right]^{1/2}$$

Vamos definir $\gamma = \frac{b}{2m}$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\therefore \boxed{p = -\gamma \pm \left[\gamma^2 - \omega_0^2\right]^{1/2}}$$

$\hookrightarrow$ solução p/ a equação $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Teremos portanto 3 casos a serem analisados:

(a) $\gamma < \omega_0$; (b) $\gamma = \omega_0$ e (c) $\gamma > \omega_0$

Caso (a) <u>Sub-Amortecido</u>

$$\omega_1 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2} \therefore p = -\gamma \pm i\omega_1$$

$$x = A e^{-\gamma t + i\omega_1 t} + B e^{-\gamma t - i\omega_1 t}$$

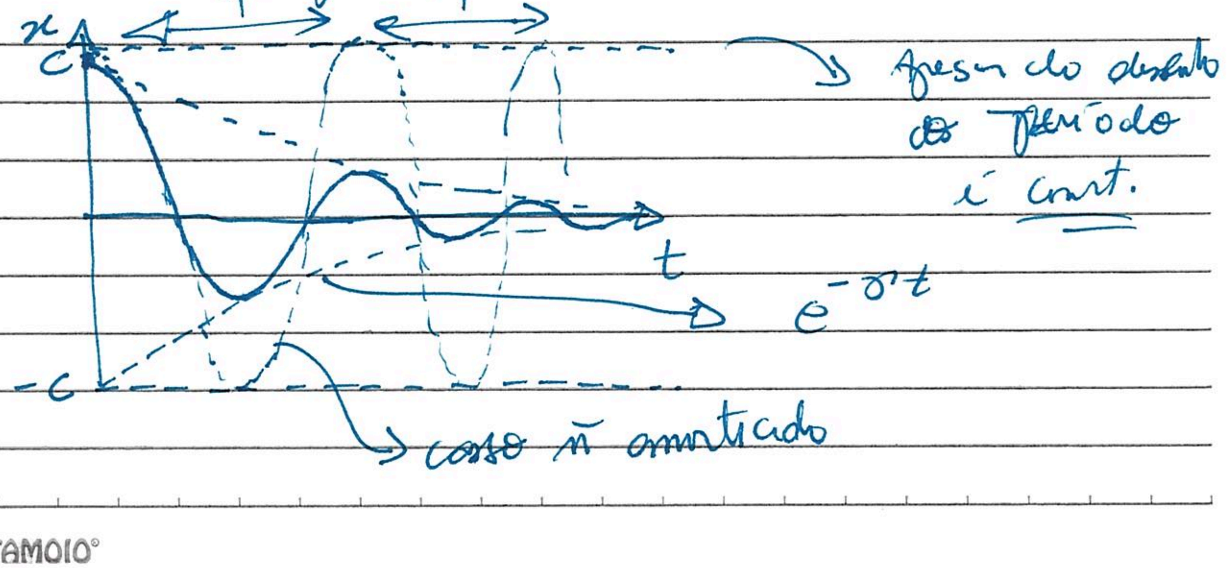
Novamente se $A = \frac{1}{2} C e^{i\theta}$ e $B = \frac{1}{2} C e^{-i\theta}$

$$A = B^*$$

$$x = C e^{-\gamma t} \left[\frac{e^{i(\omega_1 t + \theta)} + e^{-i(\omega_1 t + \theta)}}{2} \right]$$

$$\boxed{x(t) = C e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)}$$ geral!

Considerando que p/ $t=0$ $x = C$ $\theta = 0$



Podemos analisar a energia do sistema neste caso.

$$E(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$E(t) = \frac{1}{2} m c^2 \left[-\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) - e^{-\gamma t} \omega_1 \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \right]^2$$

$$+ \frac{1}{2} k c^2 \left[e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) \right]^2$$

É obviamente uma energia não constante no tempo; $\frac{dE}{dt} < 0$

P/ o caso de amortecimento pequeno $\gamma << \omega_0$

$$\omega_1 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2} = \omega_0 \left(1 - \left(\frac{\gamma^2}{\omega_0}\right) \right)^{1/2} \quad p/ \frac{\gamma}{\omega_0} << 1$$

$$\omega_1 \approx \omega_0$$

$$E(t) \approx \frac{1}{2} m c^2 \omega_0^2 \left[\cancel{-\frac{\gamma}{\omega_0}}^{\,0} e^{-\gamma t} \cos(\;) - e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\;) \right]^2$$

$$+ \frac{1}{2} k c^2 \left[e^{-\gamma t} \cos(\;) \right]^2$$

$$E(t) \approx \frac{1}{2} \cancel{m} c^2 \frac{k}{\cancel{m}} e^{-2\gamma t} \operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \theta) + \frac{1}{2} k c^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\;)$$

$$\boxed{E(t) \approx \frac{1}{2} k c^2 e^{-2\gamma t} = E_0 e^{-2\gamma t}}$$

A energia diminui com uma taxa 2 vezes

mais que a diminuição na amplitude de oscilação!

$$\boxed{\frac{1}{E}\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\ln E\right) = -2\gamma}$$

Caso (b) $\omega_0 = \gamma$: Criticamente amortecido.

$p = -\gamma$ [duas raizes iguais]

Soluções do tipo: $e^{-\gamma t}$ e $te^{-\gamma t}$

$\therefore x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t} = e^{-\gamma t}(C_1 + C_2 t)$

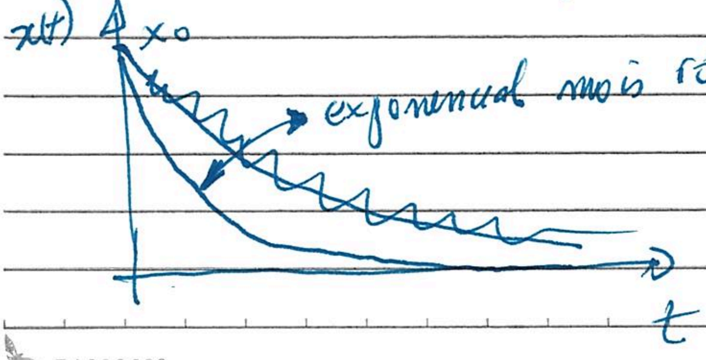
p/ o caso particular de $t=0$; $x = x_0$ e $v(t=0) = 0$

$x(0) = C_1 = x_0 \Rightarrow x(t) = (x_0 + C_2 t)e^{-\gamma t}$

$v(t) = \dot{x}(t) = C_2 e^{-\gamma t} - \gamma(x_0 + C_2 t)e^{-\gamma t}$

$v(0) = 0 = C_2 - \gamma x_0 \Rightarrow C_2 = \gamma x_0$

$\therefore x(t) = (x_0 + \gamma x_0 t)\, e^{-\gamma t} = x_0(1 + \gamma t)e^{-\gamma t}$



Fica como exercício outros casos de condição inicial
Por exemplo:

$x_0 = 0$ e $v(0) = v_0$

Por fim, (c) $\omega_0 < \gamma$. Neste caso as duas soluções são reais: Super-amortecido

$$p = -\gamma \pm \left(\gamma^2 - \omega_0^2\right)^{1/2} \begin{cases} -\gamma_1 \\ -\gamma_2 \end{cases}$$

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}}$$

Dois casos importantes:

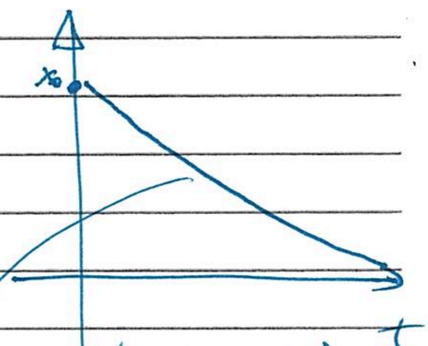
Ex1: $X(0) = x_0$ e $v(0) = 0$

$$x(0) = C_1 + C_2 = x_0$$
$$v(t) = -\gamma_1 C_1 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_2 C_2 e^{-\gamma_2 t}$$
$$v(0) = -\gamma_1 C_1 - \gamma_2 C_2 = 0 \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

$$\left(-\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + 1\right) C_2 = x_0 \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{x_0}{1-\eta}} \text{ onde } \eta = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

$$\therefore \boxed{C_1 = \frac{-x_0 \eta}{1-\eta}}$$

$$x(t) = \frac{x_0}{1-\eta}\left[-\eta e^{-\gamma_1 t} + e^{-\gamma_2 t}\right]$$



Decaimento mais lento que (b).

TAMOIO®

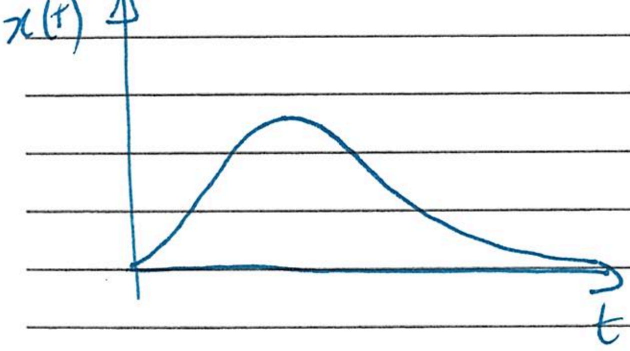
Ex_2 : $x(0) = 0 \quad v(0) = v_0$

$x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 \equiv c \; ; \; x(t) = c\left(e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}\right)$

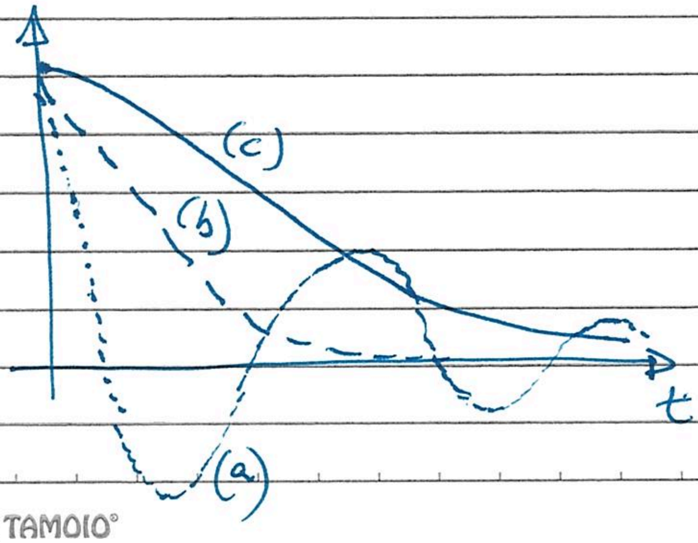
$v(t) = c\left(-\gamma_1 e^{-\gamma_1 t} + \gamma_2 e^{-\gamma_2 t}\right)$

$v_0 = \left(-\gamma_1 + \gamma_2\right) c \Rightarrow c = \dfrac{v_0}{\gamma_2 - \gamma_1}$

$$\therefore \boxed{x(t) = \underbrace{\frac{v_0}{\gamma_2 - \gamma_1}}_{>0} \left(e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}\right)}$$



Os 3 casos: (p/ uma condição específica $x(0) = x_0$ e $v(0) = 0$



(a) sub-amortecido
(b) criticamente amortecido
(c) super-amortecido

Oscilador Harmônico Forçado

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

∴ Vamos considerar o caso $\underbrace{f(t) = F_0\cos(\omega t + \theta_0)}_{\text{força oscilatória aplicada}}$. Note que $\omega \neq \omega_0$

A solução deste problema deve ser:

$$x(t) = x_{Hom} + \underbrace{x_{Não-Hom}}_{particular} = A x_1(t) + B x_2(t) + x_p(t)$$

Devemos encontrar a solução geral antes de aplicar as condições de contorno x_0 e v_0 p/ encontrar A e B

Sabemos encontrar a solução p/ a parte homogênea. A solução particular deve ser "verificada". Para fazer um "chute" razoável p/ a solução, podemos considerar o sistema físico em questão (argumentos físicos)!

No caso real, $b \neq 0$ esperamos que conforme o tempo avance, a solução homogênea tenda a zero (este é considerado o tempo de transiente no sistema). Depois disto; tempos longos, o sistema deverá comportar-se como a solução não-homogênea (ou solução particular) ou estado estacionário do sistema.

Se a função (Força) aplicada ao oscilador é uma função senoidal, o mesmo deverá oscilar com a mesma freqüência da força aplicada; ou seja:

Força do tipo $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \theta_0)$

$x_p(t) = A_p \cos(\omega t + \theta_p)$ solução particular p/ o estado estacionário.

Um truque p/ simplificar os calculos é considerar uma força e uma solução complexa e ao final, extrair a parte real.

Se $F(t) = Re\left(\underbrace{\mathbb{F}_0 e^{i\omega t}}_{\mathbb{F}(t)}\right) = F_0 \cos(\omega t + \theta_0)$

lembrando que $\mathbb{F}(t) = \mathbb{F}_0 \cos(\omega t) + \mathbb{F}_0 i \operatorname{sen}(\omega t)$ ↳ freq. de oscil.

$\therefore \quad \therefore \mathbb{F}_0 = F_0 e^{i\theta_0}$ ↳ fase ↳ amplitude

Se portanto $\mathbb{X}(t) = \mathbb{X}_0 e^{i\omega t}$ for solução de

$$m\frac{d^2\mathbb{X}}{dt^2} + b\frac{d\mathbb{X}}{dt} + k\mathbb{X} = \mathbb{F}(t)$$

então:

$$\dot{\mathbb{X}} = i\omega \mathbb{X}_0 e^{+i\omega t} \; ; \; \ddot{\mathbb{X}} = -\omega^2 \mathbb{X}_0 e^{+i\omega t}$$

$$\therefore \cancel{e^{i\omega t}}\left(m\mathbb{X}_0(-\omega^2) + bi\omega\mathbb{X}_0 + k\mathbb{X}_0 = \mathbb{F}_0 e^{i\theta_0}\right) = \mathbb{F}_0 \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$\therefore \mathbb{X}_0 = \frac{\mathbb{F}_0}{-m\omega^2 + k + ib\omega} = \frac{\mathbb{F}_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}$$

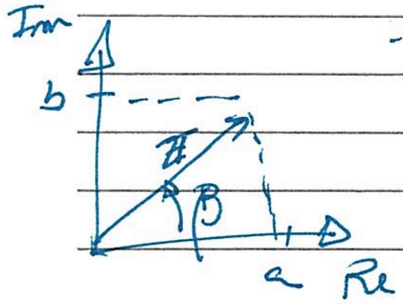
lembrando que $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$ e $\boxed{\gamma = \frac{b}{2m}}$

Temos no numerador e denominador números complexos

Será conveniente escrever estes números complexos como

$\mathcal{Z} = a + ib = z\, e^{i\beta}$ lembrando

$$z^2 = \mathcal{Z}\mathcal{Z}^* = \mathcal{Z}^*\mathcal{Z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$$



$$\therefore \quad z = |\mathcal{Z}| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Desta forma temos p/ o denominador:

$$\mathcal{Z} = \omega_0^2 - \omega^2 + i\,2\gamma\omega = \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\; e^{i\beta}$$

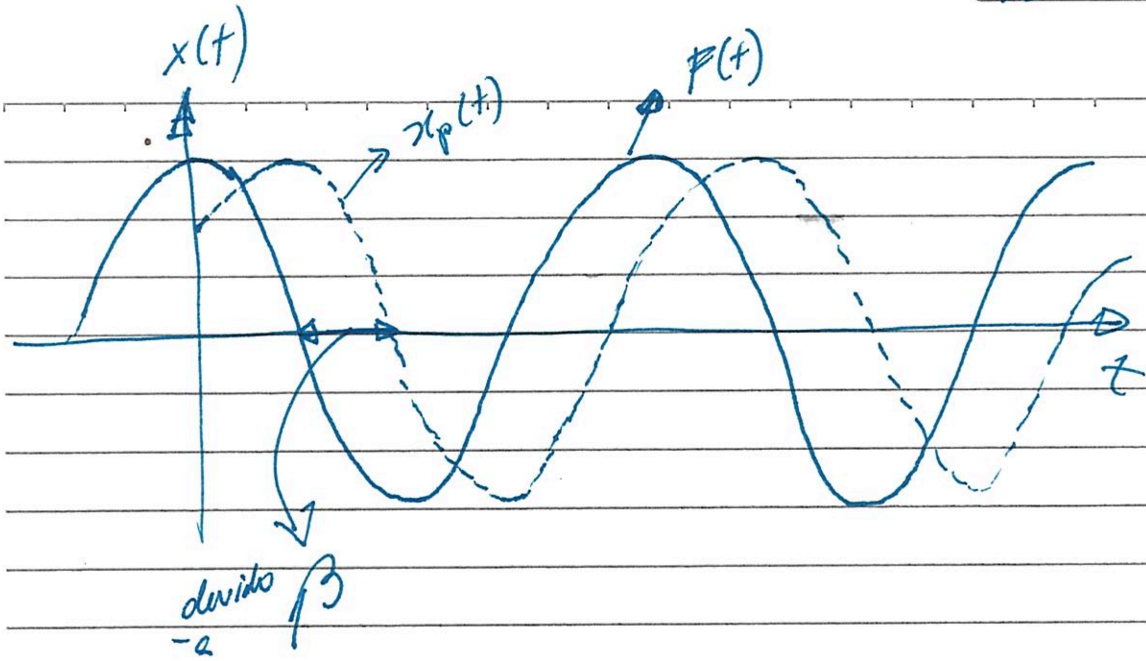
com $\beta = tg^{-1}\left[\dfrac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}\right]$

$$\therefore \quad X_0 = \frac{F_0\, e^{i\theta_0}}{m|\mathcal{Z}|\, e^{i\beta}} \quad e \quad X = X_0\, e^{i\omega t}$$

$$X(t) = \frac{F_0}{m|\mathcal{Z}|}\, e^{i(\omega t + \theta_0 - \beta)}$$

$$x(t) = Re\left[X(t)\right]$$

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t + \theta_0 - \beta)}{m\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]^{1/2}}}$$



Posição defasada de um ângulo β em relação à força oscilante.

Esta é a solução particular que será na verdade a solução geral p/ t grande $\left(t \gg \frac{1}{\gamma}\right)$

Vejamos o caso sub-amortecido

$$x_H(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$$

A e θ serão encontrados ao final, impondo à solução geral as condições iniciais $x(t_0)$ e $v(t_0)$

Portanto a solução geral será:

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$$

$$\boxed{x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) + \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\omega t + \theta_0 - \beta)}{[\quad]^{1/2}}}$$

Potência

$$F = F_0 \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m|Z|} \cos(\omega t + \theta_0 + \beta)$$

$$dw = F dx \Rightarrow P(t) = \frac{dw}{dt} = F(t)\frac{dx}{dt} = F(t)\, v(t)$$

$$\boxed{P = F v}$$

Em termos práticos a solução homogênea $\rightarrow 0$ p/ $t \gg \frac{1}{\gamma}$. Portanto a potência está concentrada na solução particular ($\tilde{N}$-homogênea)

$$\boxed{P = F \dot{x}_p}$$

Normalmente estamos interessados na potência média

$$\langle P \rangle = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} P(t)\, dt$$ com N um número grande de períodos $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Novamente será mais fácil calcular $\langle P \rangle$ p/ funções complexas e depois extrair a parte real.

$$P(t) = F(t) . \dot{x}(t) = \mathrm{Re}[F(t)] . \mathrm{Re}[\dot{x}(t)]$$

Vamos olhar p/ funções complexas quaisquer no tempo com freqüência de oscilação $\underline{\underline{\omega}}$:

$$A(t) = A_0 e^{i\omega t} \quad e \quad B(t) = B_0 e^{i\omega t}$$

Note que A_0 e B_0 são constantes complexas:

$$A(t)\, B(t) = \mathrm{Re}\left\{ \left(\frac{A(t) + A^*(t)}{2} \right) \left(\frac{B(t) + B^*(t)}{2} \right) \right\}$$

$$A(t)\, B(t) = \frac{1}{4} \mathrm{Re}\left\{ \left[A_0 e^{i\omega t} + A_0^* e^{-i\omega t} \right] . \left[B_0 e^{i\omega t} + B^* e^{-i\omega t} \right] \right\}$$

$$A(t)\, B(t) = \frac{1}{4} \mathrm{Re}\left\{ A_0 B_0 e^{2i\omega t} + A_0^* B_0^* e^{-2i\omega t} + A_0 B_0^* + A_0^* B_0 \right\}$$

$$\langle A(t) B(t) \rangle = \frac{1}{4} \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{NT} \int_0^{NT} \left[\cancel{A_0 B_0 e^{2i\omega t} + A_0^* B_0^* e^{-2i\omega t}} \right] dt + \frac{1}{\cancel{NT}} \left[A_0 B_0^* + A_0^* B_0 \right] \cancel{NT} \right\}$$

$$\boxed{\langle A(t)\, B(t) \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[A_0 B_0^* \right]}$$

Aplicando no caso da potência:

$$\mathbb{F}(t) = \mathbb{F}_0 e^{i\omega t} = F_0 e^{i\theta_0} e^{i\omega t}$$

$$\mathbb{X}(t) = \frac{F_0}{m|Z|} e^{i\theta_0} e^{-i\beta} e^{i\omega t}$$

$$\dot{\mathbb{X}}(t) = \overbrace{\frac{F_0}{m|Z|} e^{i\theta_0} e^{-i\beta} (i\omega)}^{\dot{\mathbb{X}}_0} e^{+i\omega t}$$

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ \mathbb{F}_0 \dot{\mathbb{X}}_0^* \right\}$$

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ F_0 e^{i\theta_0} \cdot \frac{F_0}{m|Z|} e^{-i\theta_0} e^{i\beta} (-i\omega) \right\}$$

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2 \omega}{m|Z|} \mathrm{Re} \left\{ -i e^{i\beta} \right\}$$

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2 \omega}{m|Z|} \mathrm{Re} \left\{ \operatorname{sen}\beta - i\cos\beta \right\}$$

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2 \omega}{m \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right]^{1/2}} \cdot \frac{2\gamma\omega}{\left[\quad = \quad \right]^{1/2}}$$

$$\boxed{\langle P(t) \rangle = \frac{F_0^2 \omega^2 \gamma}{m \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right]}}$$

Se $\operatorname{sen}\beta \;/\; \beta = n\pi \qquad \langle P \rangle = 0$

$\operatorname{sen}\beta \;/\; \beta = \frac{\pi}{2} \qquad \langle P \rangle = \text{máximo.}$

Alternativamente se γ ou $\omega = 0 \qquad \langle P \rangle = 0$

$$\to \beta = tg^{-1}\left[\frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}\right] = \frac{\pi}{2} \text{ se } \boxed{\omega = \omega_0}$$

Condição de ressonância!

Vamos investigar em mais detalhes a condição de ressonância:

$\langle P \rangle \longrightarrow$ máximo $\Rightarrow \omega \to \omega_0$

$$p/\ \omega \sim \omega_0 \Rightarrow (\omega_0^2-\omega^2) \cong \underbrace{(\omega_0+\omega)}\overbrace{(\omega-\omega_0)}^{\Delta\omega}$$

$$\cong 2\omega_0 \Delta\omega$$

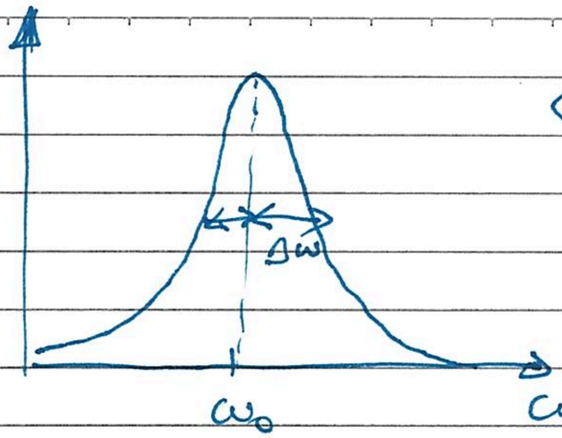
$$\therefore \langle P \rangle \cong \frac{F_0^2\gamma}{m} \frac{1}{\frac{4\cancel{\omega_0^2}\Delta\omega^2}{\cancel{\omega_0^2}} + 4\gamma^2}$$

$$\langle P \rangle \cong \frac{F_0^2\gamma}{4m} \frac{1}{\Delta\omega^2+\gamma^2} \quad \left(\text{Pico simétrico em } \omega_0\right)$$

$\to$ Formato de uma Lorentziana.

$p/\ \omega = \omega_0 \Rightarrow \Delta\omega = 0$

$$\boxed{\langle P \rangle_{MÁX} = \frac{F_0^2}{4m\gamma}}$$



$$\langle P \rangle = \frac{P_{máx}\,\gamma^2}{\Delta\omega^2+\gamma^2}$$

p/ encontrar $\Delta\omega$.

$$\langle P \rangle = \frac{P_{máx}}{2}$$

$$\frac{P_{max}}{2} = \frac{P_{max}\,\gamma^2}{\Delta\omega^2+\gamma^2} \Rightarrow \frac{P_{max}\,\Delta\omega^2}{2} + \frac{P_{max}\,\gamma^2}{2} = P_{max}\,\gamma^2$$

$$\frac{P_{max}\,\Delta\omega^2}{2} = \frac{P_{max}\,\gamma^2}{2} \Rightarrow \Delta\omega^2 = \gamma^2$$

$\therefore\ \Delta\omega = \pm\gamma\ \therefore\ \boxed{FWHM = 2\gamma}$

↳ Full width half maximum.

Note que 2γ está ligado com quão estreito (bem sintonizado) está o sistema quando na condição de ressonância.