MARION 3.17

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t + \underbrace{\theta_0}_{\to 0})$$

$$\langle T^{n+} \rangle = \langle T^{n-} \rangle$$

Uma oitava é o intervalo de frequências em que a maior frequência é duas vezes a menor frequência.

$$\omega_{\frac{1}{8}} = 2\omega_0 \;;\; \omega_{2/8} = 4\omega_0 \;;\; \omega_{3/8} = 8\omega_0$$

$$\therefore \; \omega_{\frac{n}{8}} = 2^n\omega_0 = \omega_1 \quad (n \text{ oitava acima de } \omega)$$

$$\omega_{\left(-\frac{n}{8}\right)} = 2^{-n}\omega_0 = \omega_2 \quad (n \text{ oitavas abaixo de } \omega)$$

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2}\mathbb{R}e\left[\frac{m}{2} \mathbb{V} \cdot \mathbb{V}^*\right]$$ como demonstrado em aula.

$$\mathbb{V}(t) = \mathbb{V}_0\, e^{i\omega t}$$

$$x_p = \frac{A}{mZ}\cos(\omega t + \cancel{\theta_0}^{0} - \beta)$$

$$\mathbb{X}_p = \frac{A}{mZ}\left[e^{i(\omega t - \beta)}\right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \\ \beta = tg^{-1}\left[\dfrac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\right] \end{array} \right.$$

$$\mathbb{V}(t) = \dot{\mathbb{X}}_p = \underbrace{\frac{Ai\omega}{mZ}\, e^{-i\beta}}_{\mathbb{V}_0}\, e^{+i\omega t}$$

$$\langle T\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\cancel{m}}{2}\,\frac{A i\omega e^{-i\beta}}{\cancel{m} Z}\cdot\frac{A(-i)\omega e^{i\beta}}{m Z}\right]$$

$$\boxed{\langle T\rangle = \frac{1}{4}\frac{A^2}{m}\frac{\omega^2}{Z^2} = \frac{1}{4}\frac{A^2}{m}\frac{\omega^2}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]}}$$

$$\langle T(\omega_1)\rangle = \frac{1}{4}\frac{A^2}{m}\frac{\omega_0^2\, 2^{2n}}{\left[(\omega_0^2 - 2^{2n}\omega_0^2)^2 + 4\, 2^{2n}\omega_0^2\gamma^2\right]}$$

$$\langle T(\omega_2)\rangle = \frac{1}{4}\frac{A^2}{m}\frac{\omega_0^2\, 2^{-2n}}{\left[(\omega_0^2 - 2^{-2n}\omega_0^2)^2 + 4\, 2^{-2n}\omega_0^2\gamma^2\right]}$$

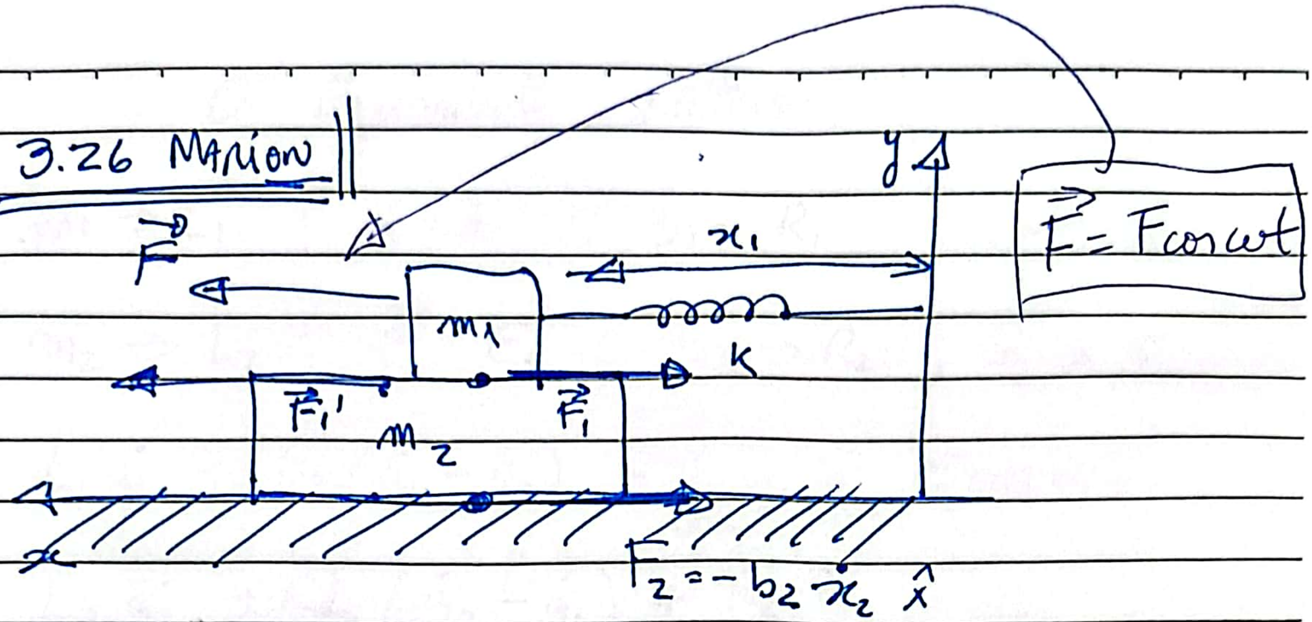
Multiplicando o numerador e o denominador por 2^{4n} em $\langle T(\omega_2)\rangle$

$$\langle T(\omega_2)\rangle = \frac{1}{4}\frac{A^2}{m}\frac{\omega_0^2\, 2^{2n}}{\left[(\omega_0^2\, 2^{2n} - \omega_0^2)^2 + 4\, 2^{2n}\omega_0^2\gamma^2\right]}$$

como $(\omega_0^2\, 2^{2n} - \omega_0^2)^2 = (\omega_0^2 - 2^{2n}\omega_0^2)$ então

$$\boxed{\langle T(\omega_2)\rangle = \langle T(\omega_1)\rangle}$$

3.26 Marion



$$\vec{R}_{esultante} = \vec{F}_{mola} + \vec{F}_{at} + \vec{F}$$ (No bloco 1)

Note que $x' = x_1 - x_2$ → Movimento relativo de m_1 em relação à m_2

∴ Analisando cada bloco separadamente e a sua resultante:

$$\vec{R}_1 = -kx_1\hat{x} - b_1\dot{x}'\hat{x} + \vec{F}$$

$$\vec{R}_2 = -b_2\dot{x}_2\hat{x} + b_1\dot{x}'\hat{x}$$

$$m_1\ddot{x}_1 = -kx_1 - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F\cos\omega t$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -b_2\dot{x}_2 + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

∴ $$\boxed{\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1 + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + kx_1 = F\cos\omega t \\ &m_2\ddot{x}_2 + b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + b_2\dot{x}_2 = 0 \end{aligned}}$$

O Equivalente Elétrico.

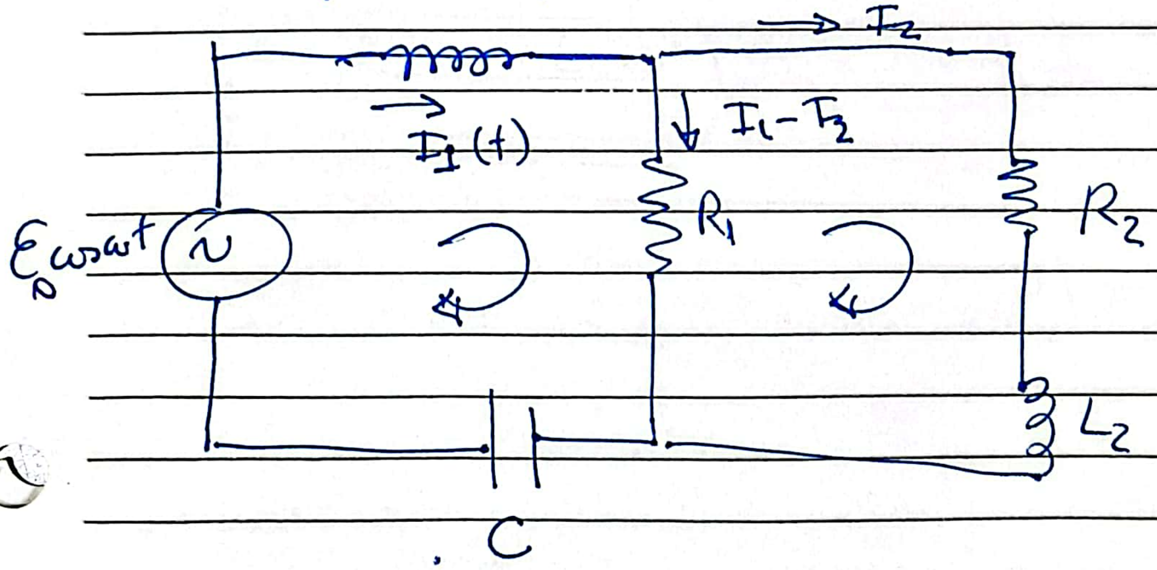
$m_1 \to L_1$; $k = \frac{1}{C}$; $b_1 = R_1$; $x_1 \to q_1$

$m_2 \to L_2$; $\vec{F} = \mathcal{E}_0$; $b_2 \to R_2$; $x_2 \to q_2$

$$L_1 \ddot{q}_1 + R_1 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \frac{1}{C} q_1 = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

$$L_2 \ddot{q}_2 + R_1 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + R_2 \dot{q}_2 = 0$$

Note que $\dot{q}_1 = i_1$ e $\dot{q}_2 = i_2$



Aplicando Lei das Malhas e Nós de Kirchhoff e fazendo $F(t) = \mathrm{Re}\left[F_0 e^{i\omega t}\right]$

$$I = \dot{q} \therefore \dot{I} = \ddot{q} \text{ e } \ddot{I} = \dddot{q}$$

$$L_1 \dddot{q}_1 + R_1 (\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) + \frac{1}{C} \dot{q}_1 = -\mathcal{E}_0 \omega \operatorname{sen} \omega t$$

$$L_2 \dddot{q}_2 + R_2 \ddot{q}_2 + R_1 (\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1) = 0$$

$$L_1 \ddot{I}_1 + R_1(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + \frac{I_1}{C} = i\omega \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$L_2 \ddot{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 + R_1(\dot{I}_2 - \dot{I}_1) = 0$$

$$I_1(t) = \mathbb{I}_1 e^{i\omega t}$$

$$I_2(t) = \mathbb{I}_2 e^{i\omega t}$$

$$-L_1\omega^2 \mathbb{I}_1 + R_1(i\omega \mathbb{I}_1 - i\omega \mathbb{I}_2) + \frac{\mathbb{I}_1}{C} = i\omega \mathcal{E}_0$$

$$-L_2\omega^2 \mathbb{I}_2 + R_2(i\omega \mathbb{I}_2) + R_1(i\omega \mathbb{I}_2 - i\omega \mathbb{I}_1) = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{C} + R_1 i\omega - L_1\omega^2\right)}_{\gamma} \mathbb{I}_1 - \underbrace{i\omega R_1}_{\beta} \mathbb{I}_2 = i\omega \mathcal{E}_0$$

$$-\underbrace{i\omega R_1}_{\beta} \mathbb{I}_1 + \underbrace{(R_1 i\omega + R_2 i\omega - L_2\omega^2)}_{\alpha} \mathbb{I}_2 = 0$$

$$-\beta \mathbb{I}_1 = -\alpha \mathbb{I}_2 \Rightarrow \boxed{\mathbb{I}_2 = \frac{\beta \mathbb{I}_1}{\alpha}}$$

$$\gamma \mathbb{I}_1 - \frac{\beta^2 \mathbb{I}_1}{\alpha} = i\omega \mathcal{E}_0$$

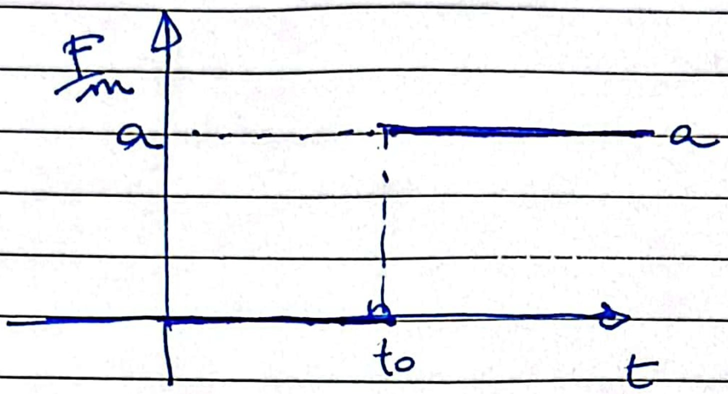
$$\mathbb{I}_1 = \frac{i\omega \alpha \mathcal{E}_0}{(\alpha\gamma - \beta^2)} \quad \text{ou} \quad \mathbb{I}_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{\underbrace{\dfrac{i(\beta^2 - \alpha\gamma)}{\omega\alpha}}_{= Z}}$$

P3 / 1241

Resposta à função Degrau e função de Green

Vamos considerar um oscilador harmônico; mas poderia ser qualquer sistema linear como vimos anteriormente. Seja este sujeito a uma força do tipo:

$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0 & ; t < t_0 \\ a & ; t \geq t_0 \end{cases} \quad \text{função degrau ou Heaviside } [a H(t_0)]$$



Condições iniciais $x \not{(} t_0 \Rightarrow x = x_0 \quad v \not{(} t_0 \Rightarrow v = v_0$

p/ $t > t_0$ a solução será $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} = a \qquad p/\ t \geq t_0$$

A solução part. $x_p = C \Rightarrow C = \frac{a}{\omega_0^2}$

$$\therefore \ x(t) = \underbrace{A\, x_1(t) + B\, x_2(t)}_{\text{Solução da Homogênea}} + \underbrace{\frac{a}{\omega_0^2}}_{\text{sol. particular}}$$

Aplicando a condição de contorno $x(0) = x_0$; $v(0) = v_0$ Teremos a solução geral:

$x(t) = x_0 = 0 \quad \forall \quad t \leq t_0 = 0 \quad$ ou $(t - t_0) = t' > 0$

$x(t') = e^{-\gamma t'}(A'\cos\omega_1 t' + B'\operatorname{sen}\omega_1 t') + \frac{a}{\omega_0^2}$

$\Rightarrow$ (Exemplo p/ o caso sub-amortecido)

$x(0) = 0 = A' + \frac{a}{\omega_0^2} \Rightarrow \boxed{A' = -\frac{a}{\omega_0^2}}$

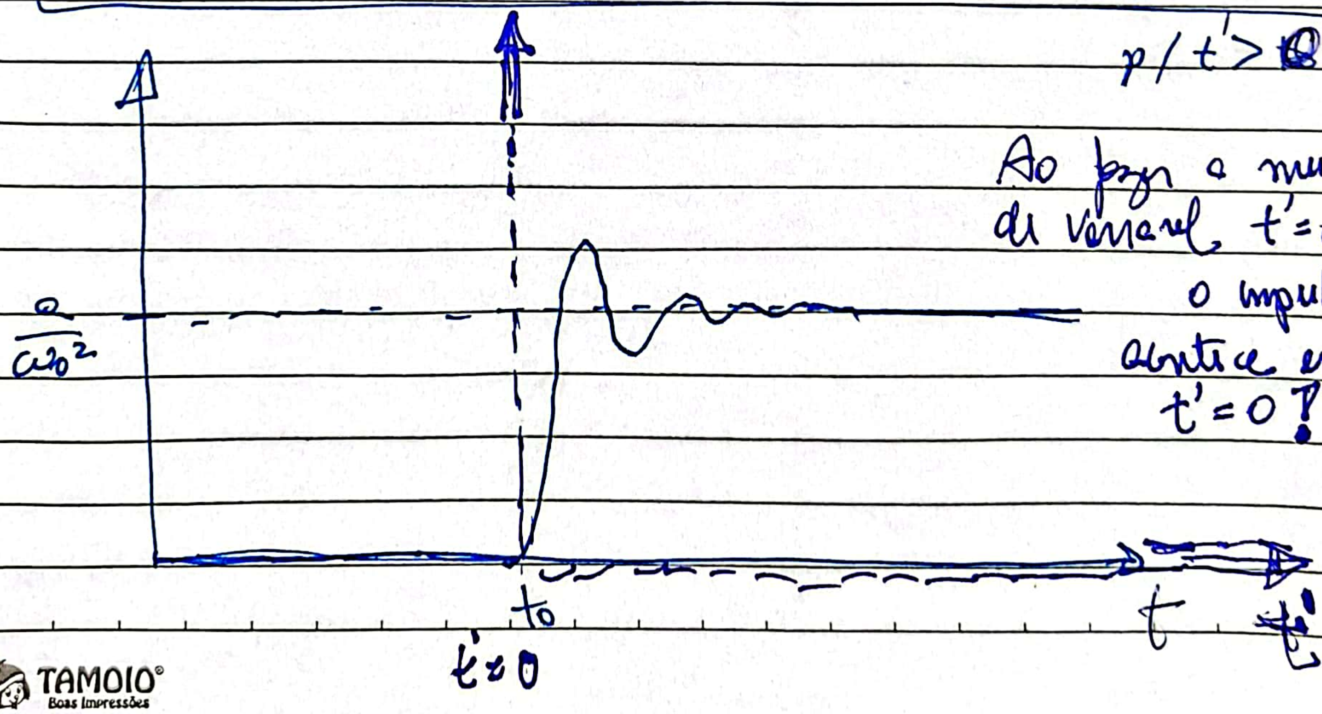
$v(t) = -\gamma e^{-\gamma t'}[\;] + e^{-\gamma t'}\omega_1[-A'\operatorname{sen}(\,) + B'\cos(\,)]$

$0 = -\gamma A' + \omega_1 B' \Rightarrow \boxed{B' = -\frac{a\gamma}{\omega_0^2\omega_1}}$

$\therefore x(t) = -e^{-\gamma t'}\left[\frac{a}{\omega_0^2}\cos(\omega_1 t') + \frac{a\gamma}{\omega_0^2\omega_1}\operatorname{sen}(\omega_1 t')\right] + \frac{a}{\omega_0^2}$

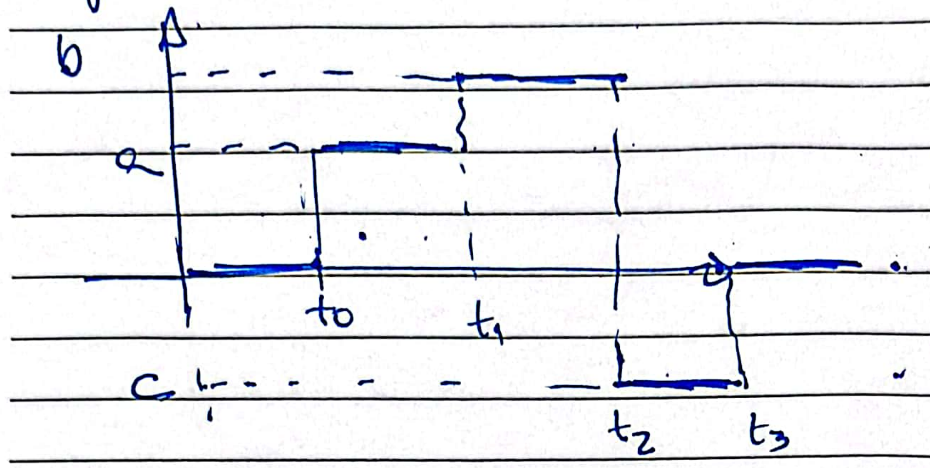
$$\boxed{x(t) = \frac{a}{\omega_0^2}\left\{1 - e^{-\gamma t'}\left[\cos(\omega_1 t') + \frac{\gamma}{\omega_1}\operatorname{sen}(\omega_1 t')\right]\right\}}$$

p/ $t' > 0$

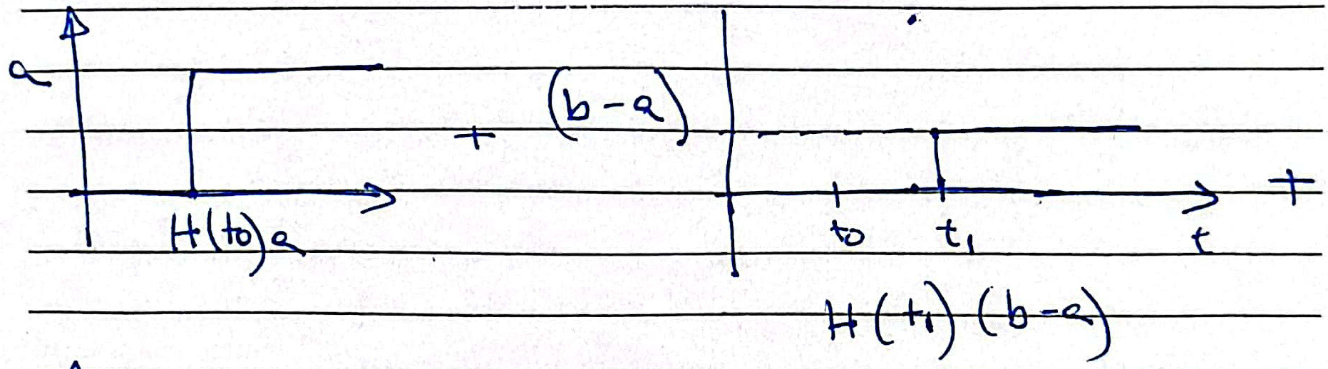


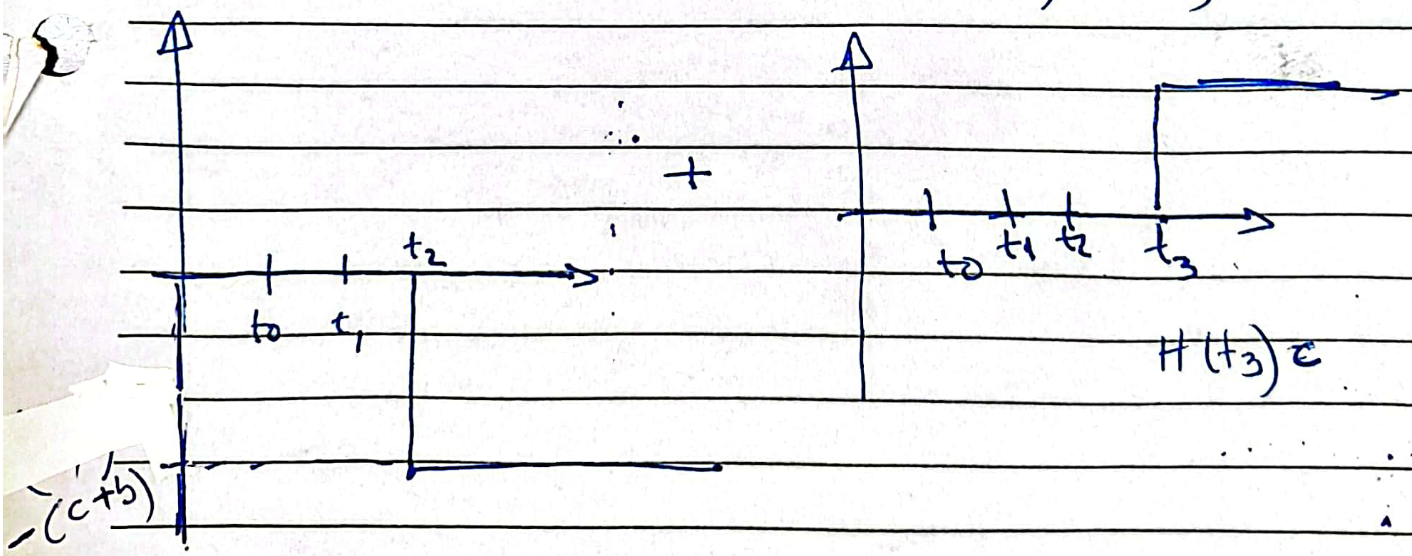
Ao fazer a mudança de variável, $t' = t - t_0$, o impulso acontece em $t' = 0$!

Podemos usar o princípio da superposição p/ resolver impulsos consecutivos como por exemplo.



= Σ de funções de Heaviside.





$H(t_n)a_n$; então o pulso completo será: $\sum H(t_n)a_n$.

Cada degrau tem uma solução do tipo

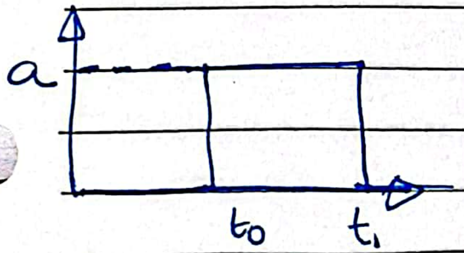
$$x_n(t) = \frac{a_n}{\omega_0^2}\left\{1 - e^{-\gamma(t-t_n)}\left[\cos\left(\omega_1(t-t_n)\right) + \frac{\gamma}{\omega_1}\sin\left(\omega_1(t-t_n)\right)\right]\right\}$$

p/ $t_n < t < t_{n+1}$

Sendo esta a solução em cada intervalo. A solução geral de cada contribuição será

$$x(t) = \sum_{n=0}^{n} x_n(t) \text{; pois a equação é linear}$$

<u>Exemplo Importante</u>: Um pulso ~~quadrado~~ retangular.



O pulso será dado então por
$H(t_0)a + H(t_1)(-a)$

$$H(t_0)a = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ a; & t \geq t_0 \end{cases} \qquad H(t_1)(-a) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ -a, & t \geq t_1 \end{cases}$$

$$H(t_0)a + H(t_1)(-a) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ a, & t_0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases}$$