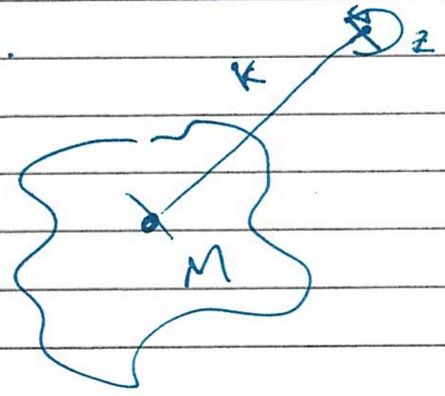
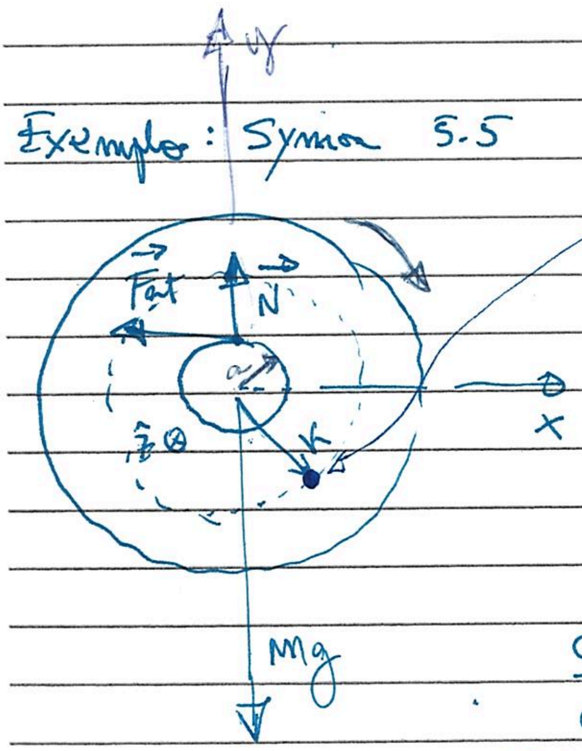
Raio de Giração.

Em alguns casos é conveniente definir o momento de inércia em termos da massa total e um raio de giro em torno de um eixo.

$$I_z = M k_z^2$$



Exemplo: Symon 5.5



$$I_z = m k^2$$

$$\vec{L}_i = I\omega_0 \hat{z} \quad \text{e}$$

$$\vec{L}(t) = I\omega(t)\, \hat{z}$$

($\hat{z}$ entrando no papel é positivo!)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_z = -F_{at}\, a\, \hat{z}$$

$$F_{at} = \mu N = \mu m g$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = -\mu m g a$$

$$\therefore I \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega' = -\mu m g a\, (t-0)$$

$$I\omega(t) - I\omega_0 = -\mu m g a t$$

Note que $\omega(t_{final}) = 0$ (A roda para!)

$$0 - I\omega_0 = -\mu \cancel{M} g a t \Rightarrow t = \frac{\cancel{M} K^2 \omega_0}{\cancel{M} \mu g a}$$

$$\boxed{t = \frac{K^2 \omega_0}{\mu g a}}$$

K demonstra que o tempo p/ parar depende da forma do objeto (distribuição de massa) e não da massa total!

N $\Rightarrow$ número de voltas até parar:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{\theta_{final} - 0}{2\pi}$$

$$\omega = \omega_0 - \alpha t \Leftarrow \boxed{I\alpha = \mu m g a \quad \alpha = \frac{\mu \cancel{m} g a}{\cancel{m} K^2} \quad \boxed{\alpha = \frac{\mu g a}{K^2}}}$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{\mu g a}{K^2} t$$

$$\Delta\theta = \omega_0 t - \frac{\mu g a t^2}{K^2 2} \therefore$$

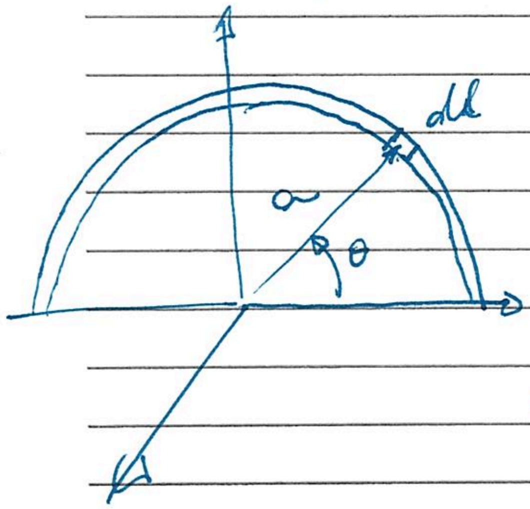
$$N = \frac{\omega_0 t}{2\pi} - \frac{\mu g a}{4\pi K^2} t^2 \Rightarrow N = \omega_0 \frac{K^2 \omega_0}{\mu a g\, 2\pi} - \frac{\cancel{\mu g a}}{4\pi \cancel{K^2}} \frac{K^{\cancel{4}\,2} \omega_0^2}{\cancel{\mu^2 a^2 g^2}}$$

$$N = \frac{\omega_0^2 K^2}{\mu g a 2\pi} \left[1 - \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \boxed{N = \frac{\omega_0^2 K^2}{4\pi \mu g a}}$$

Calculo do Centro de Massa

$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \Rightarrow R = \frac{1}{M}\int_V \rho \vec{r}\, dv$ onde ρ é a densidade $\rho = \frac{M}{V}$

Exemplo Symon 22



$x_{CM} = 0$

$y_{CM} = 0$

$z_{CM} = ?$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\, dm \;;\; dm = \lambda dl \to \lambda a d\theta$$

$$z_{CM} = \frac{1}{\cancel{M}}\int_0^{\pi} (a \operatorname{sen}\theta) \frac{\cancel{M}}{\pi \cancel{a}} \cancel{a}\, d\theta$$

$$z_{CM} = \frac{a}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\frac{a}{\pi}\cos\theta \Big|_0^{\pi}$$

$$\boxed{z_{CM} = \frac{2a}{\pi}}$$

Interessante calcular o raio de giração por exemplo p/ o eixo z

$I_z = \frac{Ma^2}{2}$ (calculamos na p/ 62-63)

$I_z = M K^2 = \frac{Ma^2}{2} \Rightarrow \boxed{K = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$ Fica como exercício calcular K_x e K_y

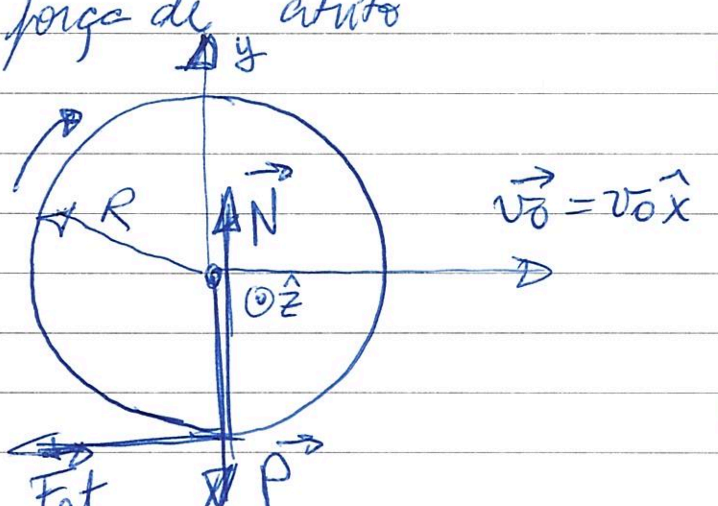
Ex: Aplicação de torque, rolamento, etc, etc.

Rolamento de uma esfera com e sem deslizamento (Rolamento puro).

Boliche ou Bilhar

Considere uma esfera homogênea de massa m e raio R que é lançada sobre uma superfície horizontal com velocidade de translação inicial horizontal $\vec{v_0} = v_0\hat{x}$ e sem rotação inicial. O coeficiente de atrito cinético entre a superfície e a esfera é μ e o campo gravitacional é $\vec{g} = -g\hat{z}$. Tome o momento de inércia da esfera em relação à qualquer eixo que passa pelo seu CM como sendo $I^{CM} = \beta m R^2$

a) Obtenha a velocidade angular de rotação da esfera $\dot{\theta}(t)$ em torno de seu CM. Dica: considere o torque da força de atrito



$$\vec{F_{at}} = -\mu|\vec{N}|\hat{x} = -\mu m g\,\hat{x}$$

$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F_{at}} = I\ddot{\theta} = I\dot{\omega}(-\hat{z})$$

$$I\dot{\omega}(-\hat{z}) = -\mu m g R(\hat{z})$$

$$\therefore \dot{\omega} = \frac{\mu \cancel{m} g \cancel{R}}{\beta \cancel{m} R^{\cancel{2}}}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu g}{\beta R} \Rightarrow \dot{\theta} = \int_0^t \frac{\mu g}{\beta R} = \frac{\mu g\, t}{\beta R}$$

$$\boxed{\dot{\theta}(t) = \frac{\mu g\, t}{\beta R}}$$

b) Determine o intervalo de tempo transcorrido desde o lançamento inicial até que a esfera comece a rolar sem deslizar. Dica: inicialmente o movimento não é de rolamento puro.

→ O movimento do CM. é desacelerado pela força de atrito.

$$\vec{F}_{at} = m\,\vec{a}_{cm} \quad \therefore \quad m\,\vec{a}_{cm} = -\mu m g\,\hat{x}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\vec{a}_{cm} = -\mu g\,\hat{x}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{v}_{cm}(t) = (v_0 - \mu g t)\,\hat{x}}$$

O rolamento puro começa exatamente quando

$$\vec{v}_{cm} = \dot{\theta} R\,\hat{x}$$

Você deve se convencer que p/ um rolamento puro o deslocamento do CM é exatamente $\boxed{\Delta x_{cm} = \theta R}$

∴ Podemos descobrir o Δt desde o $t=0$ p/ o início do rolamento puro:

$$\vec{v}_{cm}(\Delta t) = \dot{\theta} R\,\hat{x} \quad \therefore$$

$$v_0 - \mu g \Delta t = \frac{\mu g \Delta t \cancel{R}}{\beta \cancel{R}}$$

$$\left(\frac{\mu g}{\beta} + \mu g\right)\Delta t = v_0 \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{v_0 \beta}{\mu g (1+\beta)}}$$

c) Qual a velocidade de translação da esfera quando se inicia o rolamento puro? Qual a distância percorrida pela esfera desde o lançamento inicial até que se inicie o rolamento puro?

$$\vec{v}_{CM}(\Delta t) = \frac{\mu g \overbrace{\cancel{\Delta t}}^{\dot{\theta}(t)} \cancel{R}}{\beta \cancel{R}} = \frac{\cancel{\mu g}}{\cancel{\beta}} \frac{v_0 \cancel{\beta}}{\cancel{\mu g}(1+\beta)}$$

$$\boxed{\vec{v}_{CM}(\Delta t) = \frac{v_0}{(1+\beta)}}$$

Como a aceleração é constante, podemos usar a eq. de Torricelli:

$$v^2_{(\Delta t)} = v_0^2 + 2a_{CM}\Delta X$$

$$\frac{v_0^2}{(1+\beta)^2} = v_0^2 - 2\mu g \Delta X$$

$$\Delta X = \frac{v_0^2}{2\mu g}\left[1 - \frac{1}{(1+\beta)^2}\right] = \frac{v_0^2}{2\mu g}\left[\frac{\cancel{1} + 2\beta + \beta^2 - \cancel{1}}{(1+\beta)^2}\right]$$

$$\boxed{\Delta X = \frac{\beta v_0^2 (2+\beta)}{2\mu g (1+\beta)^2}}$$

d) Verifique que o trabalho da força de atrito sobre o CM da esfera e através do seu torque corresponde, respectivamente, às variações de energia cinética de translação e rotação da esfera.

d) $W_{Trans} = Fat \cdot \Delta x = -\mu m g \Delta x = -\cancel{\mu} \cdot m \cancel{g} \dfrac{\beta v_0^2 (2+\beta)}{2 \cancel{\mu} \cancel{g} (1+\beta)^2}$

$$\boxed{W_{Trans} = -\frac{m \beta v_0^2 (2+\beta)}{2(1+\beta)^2}}$$

$$\Delta K_{Transl} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2(\Delta t) - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left[\frac{v_0^2}{(1+\beta)^2} - v_0^2 \right]$$

$$\boxed{\Delta K_{Transl} = \frac{1}{2} m v_0^2 \left[\frac{1 - 1 - 2\beta - \beta^2}{(1+\beta)^2} \right]} = \boxed{-\frac{m v_0^2 \beta}{2} \left[\frac{2+\beta}{(1+\beta)^2} \right]}$$

$$\therefore \boxed{W_{Trans} = \Delta K_{Transl}.}$$

Sim, claro!
Vale o Teorema Trabalho
- Energia

$$W_{rot} = \vec{N} \cdot \Delta \vec{\theta} = R \, Fat \, \Delta\theta$$

$$W_{rot} = R \mu m g \, \Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \int_0^{\Delta t} \dot{\theta} \, dt = \int_0^{\Delta t} \frac{\mu g}{\beta R} t \, dt = \frac{\mu g \, \Delta t^2}{2 \beta R}$$

$$\Delta\theta = \frac{\mu g}{2\beta R} \left(\frac{v_0 \beta}{\mu g (1+\beta)} \right)^2 = \frac{\mu g \, v_0^2 \beta^2}{2 \beta R \mu^2 g^2 (1+\beta)^2}$$

$$\therefore \boxed{W_{rot} = \frac{\cancel{R} \cancel{m \mu g} \cancel{\mu g} \, v_0^2 \beta^{\cancel{2}}}{2 \cancel{\beta} \cancel{R} \cancel{\mu^2 g^2} (1+\beta)}} = \boxed{\beta \frac{m v_0^2}{2(1+\beta)^2}}$$

pg 69 / d

$$\Delta K_{rot} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2(\Delta t) - \cancel{\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2(0)}^{\,0}$$

$$\boxed{\Delta K_{Rot} = \frac{1}{2}\beta m \cancel{R^2} \frac{\cancel{\mu^2 g^2}}{\cancel{\beta^2 R^2}} \frac{v_0^2 \cancel{\beta^2}}{\cancel{\mu^2 g^2}(1+\beta)^2} = \frac{1}{2}\frac{\beta m v_0^2}{(1+\beta)^2}}$$

$\therefore$ $\boxed{W_{Rot} = K_{Rot}}$

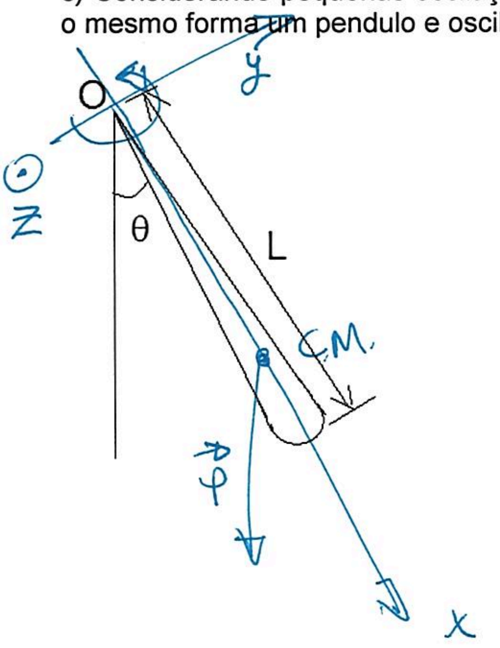
Temos um equivalente do teorema Trabalho-Energia p/ Rotações!!!

4)(2.5 pts) Um bastão fino de massa ***M*** e comprimento ***L*** pode ser representado como uma haste fina de densidade linear variável $\lambda(x)=\lambda_0(x/L)$.

a) Calcule o centro de massa (C.M.) do bastão.

b) Calcule o seu momento de inércia em relação ao C.M.

c) Considerando pequenas oscilações, encontre a freqüência angular de oscilação deste objeto quando o mesmo forma um pendulo e oscila em relação ao ponto O



$$M = \int_0^L dm = \int_0^L \lambda(x)\, dx = \int_0^L \frac{\lambda_0}{L} x\, dx \Rightarrow \boxed{M = \frac{\lambda_0 L}{2}}$$

a) $$x_{C.M.} = \frac{1}{M}\int_0^L x\, dm = \frac{1}{M}\int x \frac{\lambda_0 x}{L} dx$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\frac{\lambda_0}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{1}{M}\frac{\lambda_0 L^3}{L\,3} = \frac{1}{\cancel{M}}\frac{2\cancel{M}L^3}{\cancel{L}^2\,3}$$

$$\boxed{x_{C.M.} = \frac{2}{3}L}$$ 1,0

b) $$I_0 = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \frac{\lambda_0 x}{L} dx = \frac{\lambda_0 L^4}{L\,4} = \frac{\cancel{2}M}{\cancel{L^2}}\frac{L^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{4}_2}$$

$$\boxed{I_0 = \frac{ML^2}{2}}$$ 0.5 Pelo Teo. Eixos paralelos $I_0 = I_{CM} + Mh^2$

h é a distância entre O e o C.M. ∴ $\frac{ML^2}{2} = I_{CM} + M\frac{4L^2}{9}$

$$I_{CM} = ML^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right) \Rightarrow \boxed{I_{CM} = \frac{ML^2}{18}}$$ 0,5

c) $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = \vec{x}_{CM} \times \vec{P} \Rightarrow I_0\ddot{\theta} = -Mg\, x_{CM} \operatorname{sen}\theta \quad p/ \operatorname{sen}\theta \simeq \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{Mg\, x_{CM}}{I_0}\theta = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{Mg\, x_{CM}}{I_0} = \frac{\cancel{M}g\,\frac{2}{3}\cancel{L}}{\frac{\cancel{M}L^{\cancel{2}}}{2}}$$

$$\omega_0 = \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot g}{3L}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3g}{L}}}$$ 0.5