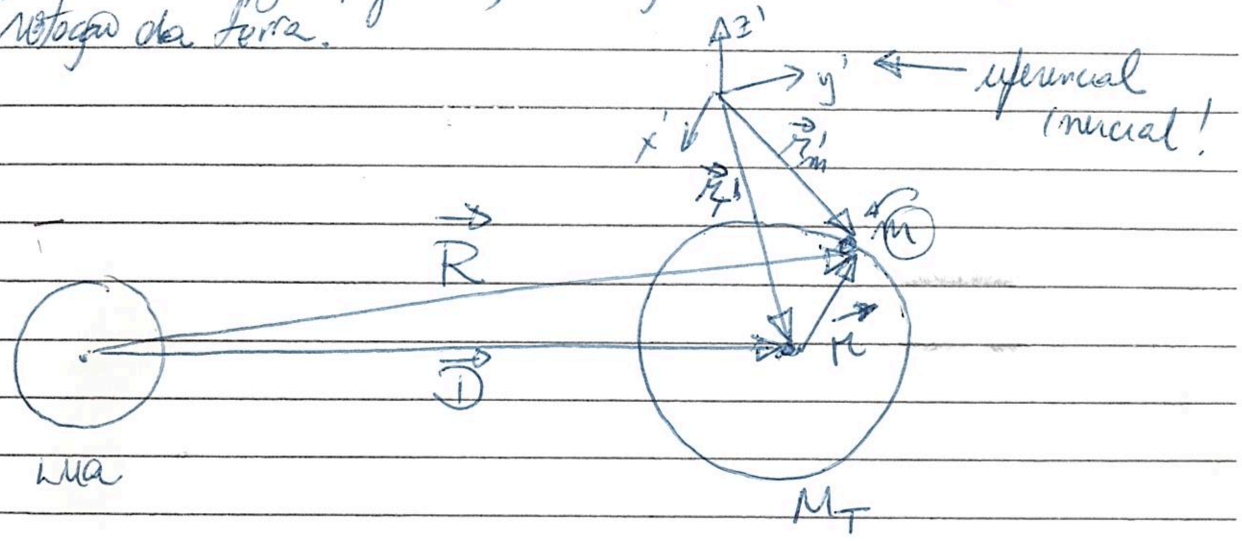
Efeito de Marés

• Galileo falha ao tentar explicar a existência das marés. Não consegue explicar porque existem duas marés altas ao dia.

• Newton dá uma explicação adequada, incluindo a atração gravitacional da lua e do sol.

Vamos considerar um $\boxed{\text{modelo simplificado}}$ deste fenômeno, sem incluir, por enquanto, a ação do sol e também a rotação da terra.



Vamos escrever a força que uma massa m sente quando medida a partir do referencial inercial (x', y', z')

$$m\ddot{\vec{r}}_m' = \underbrace{-\frac{mM_TG}{r^2}\hat{r}}_{\text{força devido ao campo grav. da Terra sobre m}} - \underbrace{\frac{GmM_L}{R^2}\hat{R}}_{\text{força devido ao campo grav. da lua sobre m}} \quad (1)$$

Agora, podemos também escrever a força sentida pelo centro de massa da Terra (modelo esférico), devido à Lua.

$$M_T \ddot{\vec{r}}_T' = -\frac{G M_T M_L}{D^2} \hat{D} \quad (2)$$

Queremos de fato, encontrar a força ou aceleração resultante sobre a massa m medida a partir do referencial em relação ao centro da Terra, ou seja $\ddot{\vec{r}}$. Podemos escrever este resultado usando a soma de vetores:

$$\vec{r}_m' = \vec{r}_T' + \vec{r} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_m' - \ddot{\vec{r}}_T'$$

$$\text{ou} \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{m \ddot{\vec{r}}_m'}{m} - \frac{M_T \ddot{\vec{r}}_T'}{M_T} \quad (3)$$

Substituindo na eq. (3) os resultados de (1) e (2) temos:

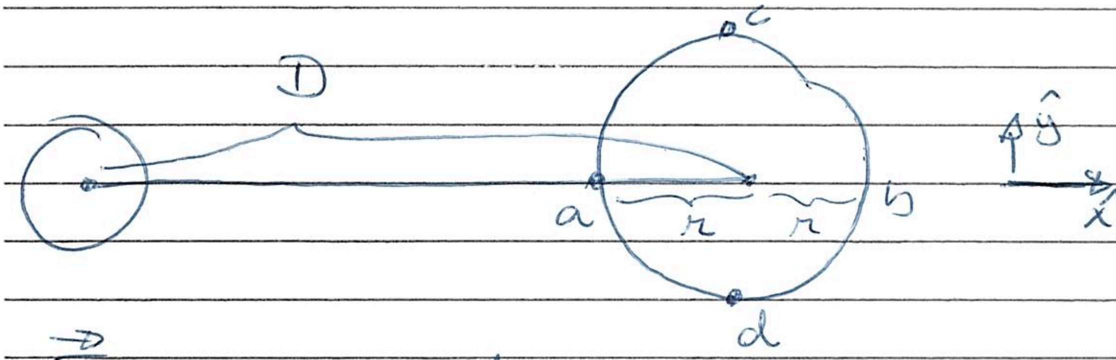
$$\ddot{\vec{r}} = \underbrace{-\frac{G M_T}{r^2} \hat{r}}_{\text{aceleração devido apenas à gravidade da Terra}} - \underbrace{G M_L \left(\frac{\hat{R}}{R^2} - \frac{\hat{D}}{D^2} \right)}_{\text{aceleração na massa } m \text{, devido à Lua}}$$

aceleração de maré.

$$\boxed{\vec{F}_{maré} = -GmM_L\left(\frac{\hat{R}}{R^2} - \frac{\hat{D}}{D^2}\right)}$$

Note que não incluímos neste modelo o fato da terra ter uma aceleração devido à rotação. Isto poderá ser feito mais apropriadamente em F415. Também não incluímos a ação do Sol. (Veja exercício do Moysés, 5.18).

Vamos agora calcular a magnitude e direção da força de maré em vários pontos!



$$\vec{F}_{maré}(b) = -GmM_L\left(\frac{1}{(D+r)^2} - \frac{1}{D^2}\right)\hat{x}$$

$$F_{maré}(b) = -\frac{GmM_L}{D^2}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{r}{D}\right)^2} - 1\right)\hat{x}$$

Note que se $\frac{r}{D} << 1$ pois $\frac{r}{D} \sim 0.02$ então $\frac{r^2}{D^2} <<< 1$ (≈ 0.0004). Com isto, podemos expandir o primeiro termo em torno de $\frac{r}{D} \sim 0$ e desprezar apenas termos de ordem superior à $\frac{r}{D}$. Por exemplo $\left(\frac{r}{D}\right)^2, \left(\frac{r}{D}\right)^3 \ldots$

$$\vec{F}_{maré}(b) = -\frac{GmM_L}{D^2}\left[\cancel{1} - \frac{2r}{D} + \cancel{\frac{3r^2}{D^2}}^{\,0} - \dots - \cancel{1}\right]$$

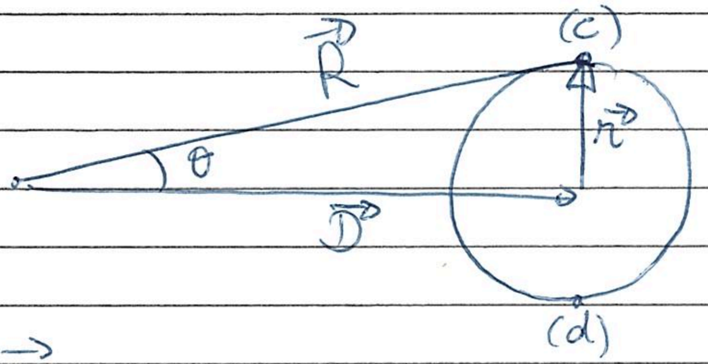
$$\therefore \boxed{\vec{F}_{maré}(b) \approx +\frac{GmM_L}{D^3}\,2r\,\hat{x}}$$

$$\vec{F}_{maré}(a) = -\frac{GmM_L}{D^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{r}{D}\right)^2} - 1\right]\hat{x}$$

$$\therefore \vec{F}_{maré}(a) = -\frac{GmM_L}{D^2}\left[\cancel{1} + \frac{2r}{D} + \cancel{\frac{3r^2}{D^2}}^{\,0} + \dots - \cancel{1}\right]\hat{x}$$

$$\boxed{\vec{F}_{maré}(a) \approx -\frac{GmM_L\,2r\,\hat{x}}{D^3}}$$

Calculemos agora em (c) e (d)



$$\vec{F}_{maré}(c) = -GmM_L\left(\frac{\hat{R}}{|\vec{D}+\vec{r}|^2} - \frac{\hat{x}}{D^2}\right)$$

$$\hat{R} = \cos\theta\,\hat{x} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{y} \Rightarrow \hat{R} = \frac{D}{|\vec{D}+\vec{r}|}\,\hat{x} + \frac{r}{|\vec{D}+\vec{r}|}\,\hat{y}$$

$$|\vec{D}+\vec{r}| = (D^2+r^2)^{1/2}$$

$$\therefore \quad \vec{F}_{maré}(c) = -GmM_L\left(\frac{r}{(D^2+r^2)^{3/2}}\hat{y} + \frac{D}{(D^2+r^2)^{3/2}}\hat{x} - \frac{1}{D^2}\hat{x}\right)$$

Consideramos que $\left(\frac{r}{D}\right)^2 \lll 1$ e pode ser desprezado ∴

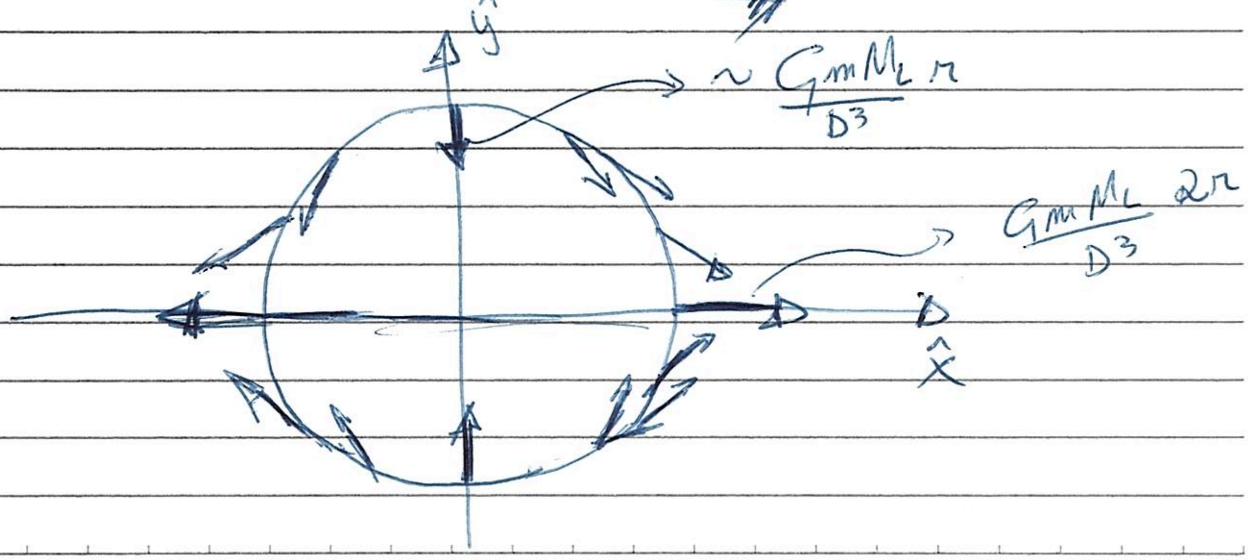
$$\vec{F}_{maré}(c) = -GmM_L\left[\frac{r\,\hat{y}}{D^3\left(1+\underbrace{\frac{r^2}{D^2}}_{0}\right)^{3/2}} + \cancel{\frac{\hat{x}}{D^2\left(1+\underbrace{\frac{r^2}{D^2}}_{0}\right)^{3/2}} - \frac{1}{D^2}\hat{x}}\right]$$

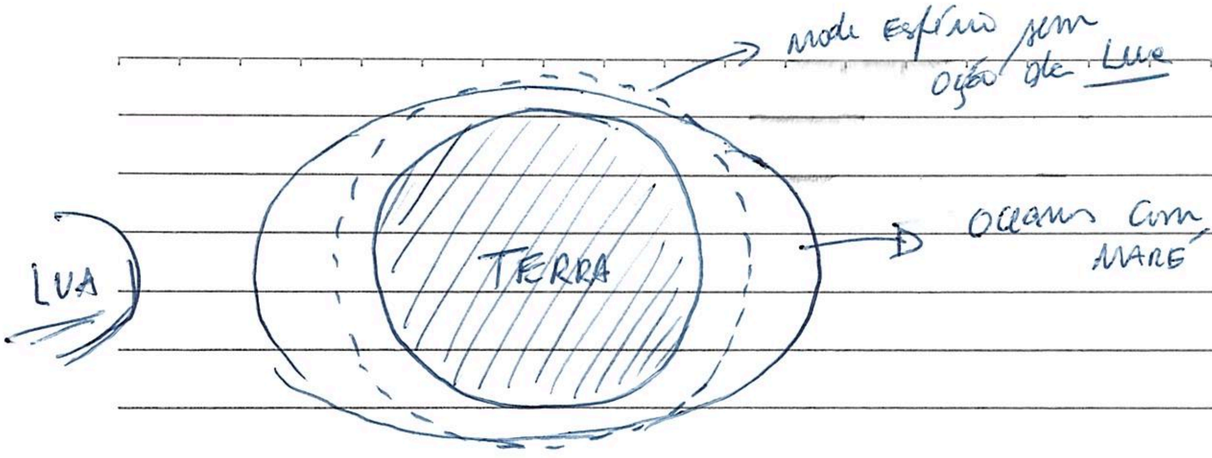
$$\therefore \quad \boxed{\vec{F}_{maré}(c) \approx -\frac{GmM_L}{D^3}\,r\,\hat{y}}$$

Por simetria:

$$\boxed{\vec{F}_{maré}(d) \approx +\frac{GmM_L}{D^3}\,r\,\hat{y}}$$

∴





Para uma dada posição qualquer, podemos substituir r por x e y

$$\boxed{\begin{aligned} F_{MARÉ_x} &= 2\frac{GmM_L}{D^3}\,x = 2\frac{GmM_L}{D^3}\cos\theta \\ F_{MARÉ_y} &= -\frac{GmM_L}{D^3}\,y = -\frac{GmM_L}{D^3}\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}}$$