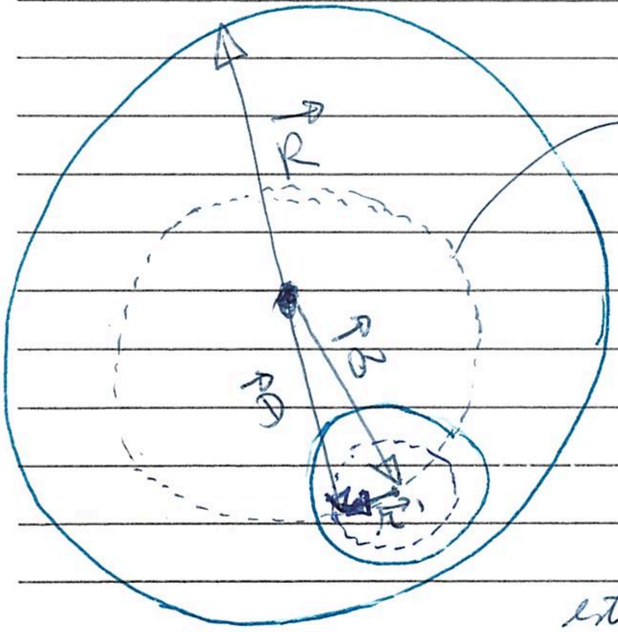
Alguns Exemplos

Exemplo 1: Princípio da superposição de campos + "Lei de Gauss"



Queremos calcular o campo em um ponto qualquer interno ao furo (esférico). Seja este ponto descrito pelo vetor:

$$\vec{D} = \vec{a} + \vec{r}'$$

Consideremos agora uma superfície esférica centrada em $(0,0,0)$ com raio $|\vec{D}|$. Consideremos uma ~~massa~~ densidade de massa $+\rho_0$ e apliquemos a "Lei de Gauss"

$$\oint_{S(\vec{D})} \vec{g}(\vec{D}) \cdot d\vec{a} = -4\pi G \,(\text{massa envolvida})$$

Por simetria esférica $\vec{g}(\vec{D}) = g(\vec{D})\,\hat{D}$

$$d\vec{a} = da\,\hat{D} \quad \therefore$$

$$g(D)\,\cancel{4\pi}D^2 = -\cancel{4\pi}G\int_{V(\vec{D})}\rho_0\,dV = -\cancel{4\pi}G\,\frac{4}{3}\pi D^3\rho_0$$

$$\therefore g(D) = -\frac{4}{3}\pi\rho_0 D \Rightarrow \boxed{\vec{g}_{(+)}(\vec{D}) = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0\vec{D}}$$

Calculemos agora o campo no ponto $\vec{D}$, mas devido a falta de massa na região do buraco.

$$\vec{g}'(\vec{D}) = \vec{g}'(\vec{r}\,') = \hat{r}'\,g'(r')$$

$\therefore$ Novamente por simetria esférica, podemos calcular usando uma superfície de "Gauss" centrada em $\vec{a}$ e com raio r', mas agora, considerando $\rho = -\rho_0$

$$\therefore \int_{S(\vec{r}\,')}\vec{g}'(\vec{r}\,')\cdot d\vec{a}\,' = -4\pi G\int(-\rho_0)\,dv'$$

$$\therefore g'(r')\,\cancel{4\pi}r'^2 = +\cancel{4\pi}G\rho_0\frac{4}{3}\pi r'^3$$

$$g'(r') = \frac{4\pi}{3}G\rho_0\,r' \Rightarrow \boxed{\vec{g}_{(-)}(\vec{D}) = \frac{4}{3}\pi G\rho_0\vec{r}\,'}$$

Mas $\vec{g}(\vec{D}) = \vec{g}_+(\vec{D}) + \vec{g}_-'(\vec{D})$

$$\vec{g}(\vec{D}) = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0\vec{D} + \frac{4}{3}\pi G\rho_0\vec{r}\,'$$

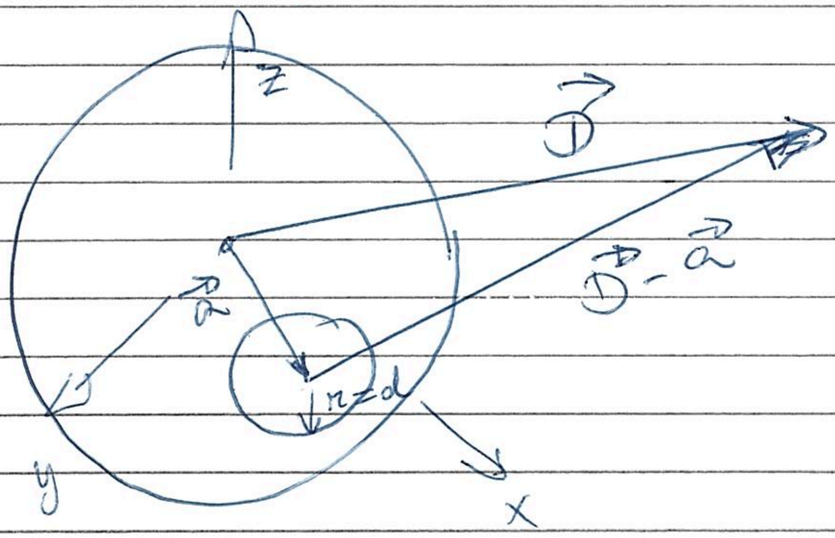
como $\vec{r}\,' = -\vec{a} + \vec{D}$

$$\boxed{\vec{g}(\vec{D}) = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0\vec{a}}$$

Note que o campo gravitacional dentro do buraco é constante (em módulo e direção !!)

$\Rightarrow$ Note também que se $\vec{a} = 0$, recuperamos o resultado p/ a casca esférica ($\vec{g} = 0$ dentro)

Calculemos fora da esfera!



Devido à massa:

$$\vec{g}(\vec{D}) = -\frac{G \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3}{D^3} \vec{D}$$

Devido ao buraco:

$$\vec{g}'(\vec{D} - \vec{a}) = +\frac{G \rho_0 \frac{4}{3}\pi d^3 (\vec{D} - \vec{a})}{\left(|\vec{D} - \vec{a}|^3\right)}$$

$$\therefore\ \vec{g}(\vec{D}) = -G\rho_0 \tfrac{4}{3}\pi \left[\frac{R^3}{D^3}\vec{D} - \frac{(\vec{D}-\vec{a})}{|\vec{D}-\vec{a}|^3} d^3 \right]$$

Note que o campo em $\vec{D}$ não aponta na direção de $\hat{D}$, pois temos uma distribuição não esfericamente simétrica devido o buraco.

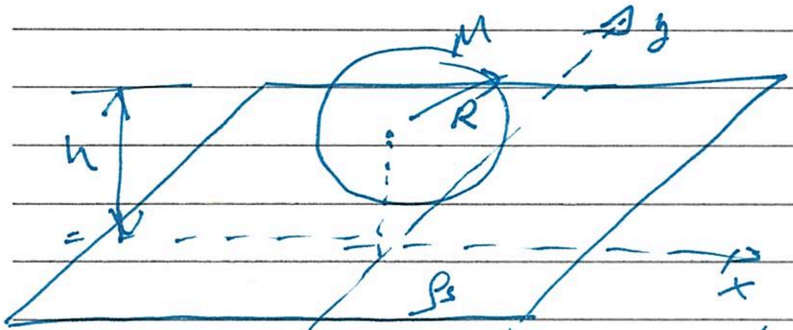
É óbvio que quando $d \to 0$, o efeito fica desprezível e obtemos a distribuição de uma esfera.

$\boxed{\vec{g} \propto -\frac{MG}{D^2}\hat{D}}$; Quando $\vec{a} \to 0$ temos a distribuição da casca-esfera.

$$\vec{g}(\vec{D})_{p/\,a=0} = \frac{-G\rho_0\frac{4}{3}\pi}{D^2}\left[R^3 - d^3\right]\hat{D}$$

$$\rho_0 \tfrac{4}{3}\pi (R^3 - d^3) = M \Rightarrow \boxed{\vec{g}(\vec{D}) = -\frac{GM}{D^2}\hat{D}}$$

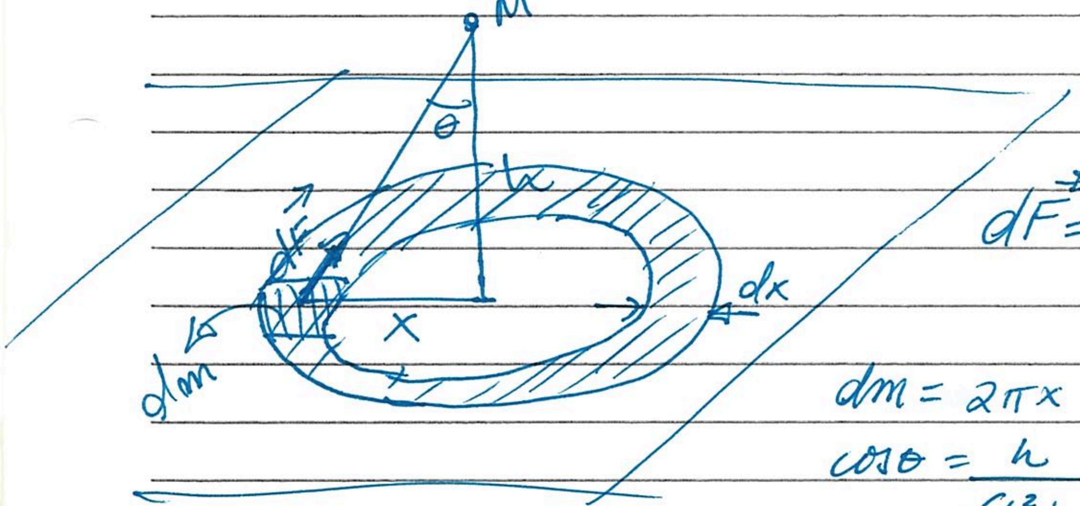
Exemplo 2 (MARION 5.16) Novamente a simetria esférica!



Qual a força que a esfera de massa M, raio R e distribuição de massa uniforme, exerce sobre uma folha infinita de distribuição de massa ρ_s.

→ Lembremos que uma distribuição esférica atrai qualquer massa pontual δm posicionada fora da esfera como se toda a massa estivesse concentrada no seu centro. (já provamos isto!).

Podemos portanto substituir o problema por:



$$d\vec{F} = \frac{GM\,dm\cos\theta}{h^2+x^2}\,\hat{z}$$

$$dm = 2\pi x\,dx\,\rho_s$$

$$\cos\theta = \frac{h}{(h^2+x^2)^{1/2}}$$

$$\therefore\; F_z = GMh\pi\rho_s \int_0^\infty \frac{2x\,dx}{(h^2+x^2)^{3/2}}$$

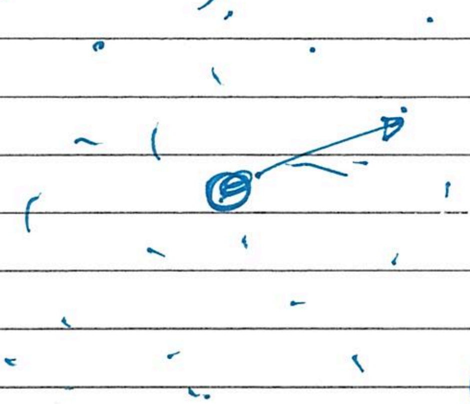
fazendo $\xi = h^2+x^2$

$\therefore\; d\xi = 2x\,dx$

$$F_z = GMh\rho_s\pi \int_{\mp\xi^-}^{\mp\xi^+} \frac{d\xi}{\xi^{3/2}} = -2GMh\rho_s\pi \frac{1}{\xi^{1/2}}\Bigg|_{\xi^-}^{\xi^+}$$

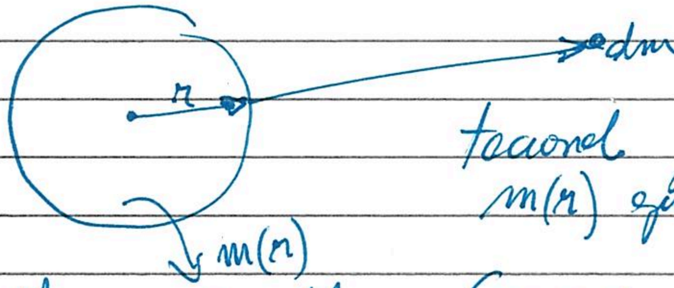
$$F_s = -2GMh\pi\rho_s \frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = 2GM\rho_s\pi\,\hat{z}}$$

Exemplo 3// Energia Gravitacional de formação (Esfera).
(Marion 5.14)



Imaginemos toda a massa dispersa e queremos calcular a quantidade de energia acumulada gravitacionalmente para formar uma esfera de massa M e raio R (como por exemplo uma estrela).

A energia para trazer uma massa infinitesimal do infinito até a posição R será:



$dU = dm\,\phi$ onde ϕ é o potencial gravitacional gerado pela massa $m(r)$ que já está lá:

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$ (caso de densidade constante).

e $\phi(r) = -\dfrac{m(r)G}{r}$ mas $m(r) = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{Mr^3}{R^3}$

$$\phi(r) = -\frac{MGr^2}{R^3} \quad ; \quad dm = 4\pi r^2 dr \rho \Rightarrow$$

$$\boxed{dm = 4\pi r^2 dr \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} = \frac{3r^2 M dr}{R^3}}$$

$$\therefore U = \int du = -\int_0^R dr \left(\frac{3r^2 M}{R^3}\right)\left(\frac{MG r^2}{R^3}\right)$$

$$U = -\int_0^R dr \frac{3M^2 G r^4}{R^6} \Rightarrow \boxed{U = -\frac{3}{5}\frac{M^2 G}{R}}$$

Energia interna.

Discussão p/ o caso do sol.:

$M_{sol} = 2\times 10^{30}$ Kg

$R_{sol} = 6{,}955\times 10^5$ Km

$$\boxed{U_{\substack{self-\\grav.\ Energy}}(SOL) = \frac{+3}{5}\frac{4\times 10^{60}\times 6.67\times 10^{-11}}{6.955\times 10^{8}[m]} \approx 2{,}3\times 10^{41}\,J}$$

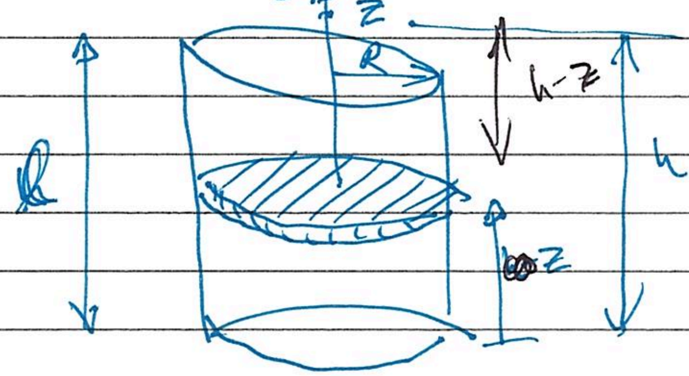
Até o século 18-19, acreditava-se que o sol emanava sua energia após queima (combustão) de um combustível, tal como madeira, ou carvão. O problema é por quanto tempo este material queimaria?

Usando o cálculo que encontramos acima e assumindo o material do sol como Carbono, teríamos uma inconsistência. Qualquer combustível daria algo como 50.000 anos. OPS! Já no século 19 os cientistas acreditavam que a terra deveria ter algo como 100 milhões de anos pelo menos....

Energia gravitacional: Herman von Helmholtz (1850) usa o cálculo acima e incluindo agitação térmica + aquecimento + emissão de luz chega a 20 milhões de anos. Ainda insuficiente p/ a idade do sol (~ 4 bil. anos) ⇒ Resposta

Veja texto na página do curso.

Ex. 4 || Em muitos casos, usamos o potencial p/ facilitar o cálculo de $\vec{g}$. Isto nem sempre é verdade!



dg_z = g disco com espessura dz.

$$\vec{g}_{disco}(h) = 2\pi\rho G\left[\frac{h-z}{[R^2+(h-z)^2]^{1/2}} - 1\right]\hat{z}$$

$$dg_z = 2\pi\rho G\left[\frac{(h-z)}{[R^2+(h-z)^2]^{1/2}} - 1\right]dz$$

$$g_z = \int dg_z = \int_0^{\ell} 2\pi\rho G\left[\frac{(h-z)}{[R^2+(h-z)^2]^{1/2}} - 1\right]dz$$

$\xi = h - z \Rightarrow d\xi = -dz$

$$g_z = -\underbrace{\int_{\xi^-}^{\xi^+} 2\pi\rho G\left[\frac{\xi \, d\xi}{(R^2+\xi^2)^{1/2}}\right]}_{1} + \underbrace{2\pi\rho G\int_{\xi^-}^{\xi^+} d\xi}_{2}$$

$x = R^2 + \xi^2 \;=\; dx = 2\xi\, d\xi$

$\therefore$ ①

$$-\pi \rho G \int_{x_-}^{x^+} \frac{dx}{x^{1/2}} \Rightarrow -2\pi\rho G\, x^{1/2} \Big|_{x-}^{x^+}$$

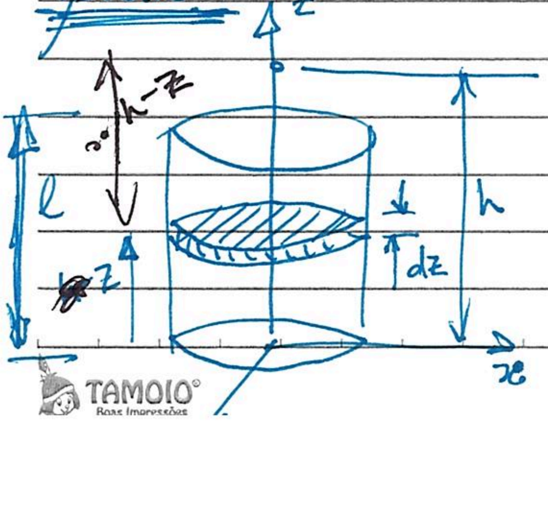
$$\therefore\; -2\pi\rho G \left[R^2 + (h-z)^2\right]^{1/2} \Big|_0^{\ell} = -2\pi\rho G \Big[\left[R^2+(h-\ell)^2\right]^{1/2} - \left[R^2+h^2\right]^{1/2}$$

incluindo e agora a integral ②:

$$② \Rightarrow +2\pi\rho G \left[h - z\right]\Big|_0^{\ell} = 2\pi\rho G \ell \left[\cancel{h} - \ell - \cancel{h}\right]$$

$$\therefore \boxed{g_z = -2\pi\rho G \left\{\left[R^2 + (h-\ell)^2\right]^{1/2} - \left[R^2+h^2\right]^{1/2} + \ell\right\}}$$

Poderíamos ter tentado calcular alternativamente o potencial e depois obter $\vec{g}$ ($\vec{g} = -\nabla\phi$). Será que é mais fácil?



$d\phi = \phi$ disco com espessura dz

$$\phi\, \text{disco} = -2\pi\rho G \left\{\left[R^2 + (h-z)^2\right]^{1/2} - (h-z)\right\}$$

$$d\phi = -2\pi\rho G \left\{ \left[(R^2 + (h-z)^2 \right]^{1/2} - (h-z) \right\} dz$$

$$\phi(z) = \int d\phi = -2\pi\rho G \int_0^{\ell} \left\{ \underbrace{\left[R^2 + (h-z)^2 \right]^{1/2}}_{1} - \underbrace{(h-z)}_{2} \right\} dz$$

(1) $$\int_0^{\ell} (R^2 + h^2 - 2hz + z^2)^{1/2} \, dz$$

A integral (1) Não é trivial de se resolver. Precisamos, por exemplo, das tabelas de integral em E.11 e E.8.a

$$\int (ax^2 + bx + c)^{1/2} dx = \frac{2ax+b}{4a} \sqrt{(\ )} + \frac{4ac-b^2}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{(\ )}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\ )}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left[2\sqrt{a}\sqrt{(\ )} + 2ax + b \right] \quad \text{p/ } a > 0$$

$a = 1$; $b = -2h$ e c $R^2 + h^2$

Note que o problema já ficou algebricamente bem mais complicado.!

$$\int \sqrt{\ } \, dx = \frac{2z-2h}{4} \sqrt{\ } + \frac{4(R^2+h^2) - 4h^2}{8} \left[\ln \sqrt{\ } + 2z - 2h \right]_{z=0}^{z=\ell}$$

$$= \frac{2\ell - 2h}{4} \sqrt{\ell} + \frac{4R^2}{8} \left[\ln\sqrt{\ell} + 2\ell - 2h \right] - \frac{2h}{4} \sqrt{0} +$$

$$+ \frac{4R^2}{8} \left[\ln\sqrt{0} - 2h \right]$$

Substituindo e rearranjando:

$$\boxed{\Phi(h) = -2\pi G\rho\left[-\frac{(h-l)}{2}\sqrt{R^2+(h-l)^2} + \frac{R^2}{2}\ln\left[-2(h-l)+2\sqrt{R^2+(h-l)^2}\right] + \frac{h}{2}\sqrt{R^2+h^2} - \frac{R^2}{2}\ln\left[-2h+2\sqrt{R^2+h^2}\right] \underbrace{- hl + \frac{1}{2}l^2}_{2^a \text{ integral}}\right]}$$

p/ obter $\vec{g}(h)$ ainda teremos que fazer.

$$\vec{g}(h) = -\vec{\nabla}\phi(h) \therefore \boxed{\vec{g}(h) = -\frac{\partial}{\partial h}\phi(h)}$$

→ That is a nightmare!

Conclusão: Às vezes é mais fácil calcular diretamente $\vec{g}$! No entanto, é difícil ter uma boa intuição antes de tentar...