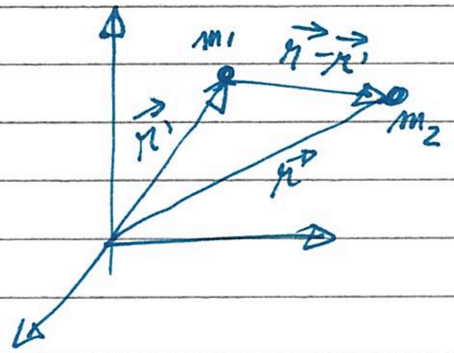
Gravitação

Princípio da gravitação universal, primeiramente descrito por Newton em seu famoso livro "Principia..." em 1687.

Força da massa m_1 em $\vec{r}'$ sobre a massa m_2 em $\vec{r}$

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -G m_1 m_2 \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|(\vec{r}-\vec{r}')|^3}}$$



Importante:

1. A força é sempre atrativa
2. Está na linha que une as partículas pontuais
3. É inversamente proporcional ao quadrado da distância
4. A equação acima só vale para partículas pontuais. Para um conjunto de partículas ou um corpo extenso é necessário assumir o princípio da superposição.

Podemos escrever a equação para N partículas de massa m_i cada uma em um ponto do espaço $\vec{r}_i'$. A força total sobre uma partícula de massa m em $\vec{r}$ será:

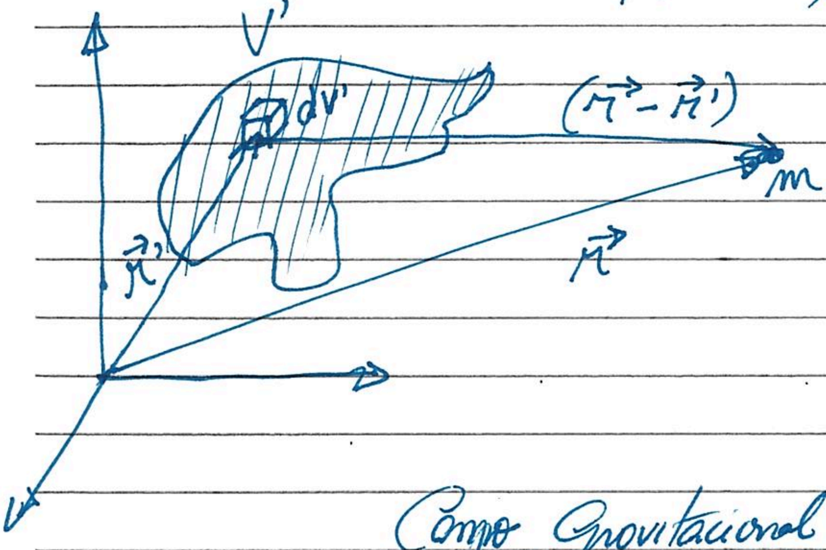
$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\, m\, m_1 \frac{\vec{r}-\vec{r}_1'}{|\vec{r}-\vec{r}_1'|^3} - G\, m\, m_2 \frac{\vec{r}-\vec{r}_2'}{|\vec{r}-\vec{r}_2'|^3} - \ldots$$

ou $$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -G m \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\vec{r}-\vec{r}_i'}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|^3}}$$

No caso de uma distribuição contínua de massas, podemos representar a partícula $\boxed{m_i} \rightarrow$ por $\boxed{dm(\vec{r}')}$ que pode ser descrita como $dm(\vec{r}') = \rho(\vec{r}')\, dv'$

Desta forma:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G m \int_V \frac{\rho(\vec{r}')\,(\vec{r}-\vec{r}')}{|(\vec{r}-\vec{r}')|^3}\, dv'$$



$$m' = \int_{V'} \rho(\vec{r}')\, dv'$$

Campo Gravitacional

Podemos definir um campo gravitacional de forma que este não dependa da massa (m) no ponto $\vec{r}$, ou seja, este campo vetorial definirá as propriedades gravitacionais do espaço, dependendo apenas da distribuição de massa que o gera; de forma que a força $\vec{F}(\vec{r})$ sentida por uma partícula de massa (m) seja escrita como

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g}(\vec{r})}$$

→ A força sobre a partícula m é proporcional ao campo.!!

Assim
$$\boxed{\vec{g}(\vec{r}) = -G\int_{V'} \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV'}$$

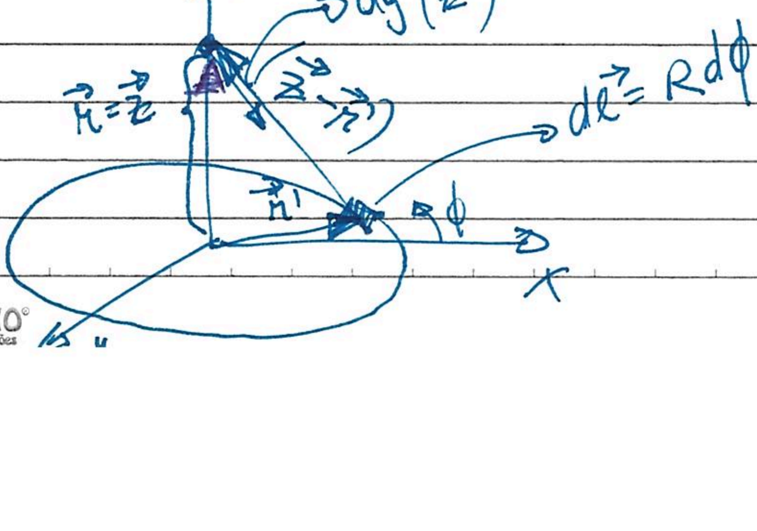
É obvio que se tivermos uma distribuição superficial de massa:

$$\rho'(\vec{r}\,') \rightarrow \sigma'(\vec{r}\,') \quad e \quad \int_{S'} \sigma'(r)\ldots dA$$

p/ a distribuição linear de massa o equivalente será

$$\rho'(\vec{r}) \rightarrow \lambda'(\vec{r}\,') \quad e \quad \int_{\Gamma'}$$

<u>Exemplo 1</u>| Distribuição linear de massa, com densidade λ constante em um anel de raio R. Qual o campo gravitacional no eixo z a uma distância z do anel?



Note que no plano xy em $(\vec{z})$, a componente $d\vec{g}$ neste plano será zero na soma pois sempre existirá um elemento de massa igual e diametralmente simétrico e oposto que o cancelará.

$$d\vec{g}(\vec{z}) = -dg_z\,\hat{z} = -dg\cos\theta\,\hat{z}$$

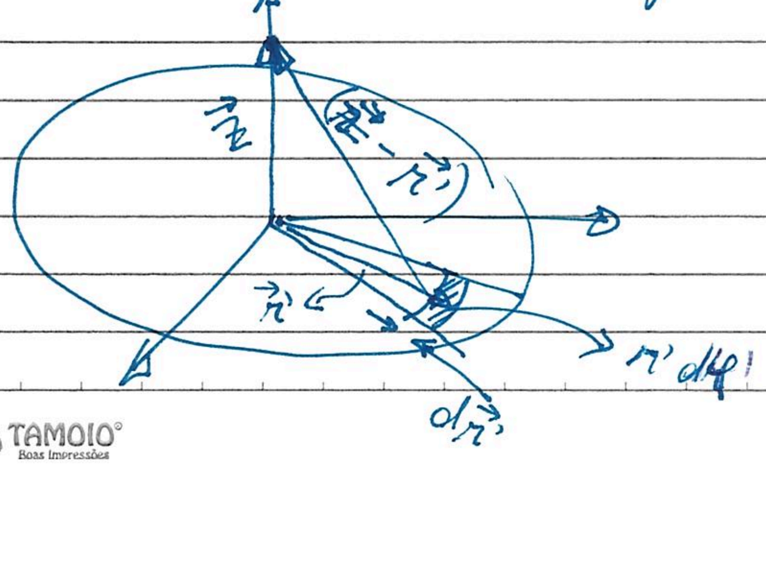
$$\cos\theta = \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\vec{g}(\vec{z}) = -G\int_M \frac{\lambda(\vec{r}')\,dl'\cos\theta\,\hat{z}}{(z^2+R^2)^2}$$

$$\vec{g}(\vec{z}) = -G\int_0^{2\pi} \frac{\lambda R\, z\, d\phi\,\hat{z}}{(z^2+R^2)^{3/2}} = -G\frac{\overbrace{R\,z\,2\pi\lambda}^{M}}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}$$

Se $\lambda = \dfrac{M}{2\pi R}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{g}(\vec{z}) = -\dfrac{GM\vec{z}}{(z^2+R^2)^{3/2}}}$

② Distribuição superficial uniforme σ em um disco de raio R. Qual o campo no eixo z



$dA' = r' dr' d\varphi'$ $\qquad r' \to 0$ a R

$\qquad \varphi' \to 0$ a 2π

De forma análoga ao caso anterior $\vec{g}(\vec{z}) \parallel \hat{z}$ ∴

$$\vec{g}(\vec{z}) = -G\hat{z}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{\sigma\, z\, dA}{(z^2+r'^2)^{3/2}}$$

$$= -G\hat{z}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{\sigma\, z\, r' dr' d\varphi'}{(z^2+r'^2)^{3/2}}$$

$$\vec{g}(\vec{z}) = -G\,2\pi\,\sigma\,\vec{z}\int_0^R \frac{r' dr'}{(z^2+r'^2)^{3/2}}$$

$\xi = z^2 + r'^2 \Rightarrow d\xi = 2r' dr'$

$$\therefore \vec{g}(\vec{z}) = -\frac{G\vec{z}\,\sigma\,\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}\int_{z^2}^{z^2+R^2}\frac{d\xi}{\xi^{3/2}} = \frac{G\vec{z}\,\sigma\pi}{\frac{1}{2}}\,\xi^{-1/2}\Big|_{z^2}^{z^2+R^2}$$

$$\boxed{\vec{g}(\vec{z}) = -2G\sigma\pi\,\vec{z}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]}$$

Vale a pena verificar p/ o caso $\frac{R^2}{z^2} \ll 1$

$$\vec{g}(\vec{z}) = -2G\sigma\pi\frac{\vec{z}}{z}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2}}\right]$$

$$g(z) = -2G\sigma\pi\,\hat{z}\left[1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2} - \dots\right] \approx -\frac{GM}{z^2}$$

Podemos continuar calculando o campo gravitacional para qualquer distribuição de massa usando esta técnica de integração direta. No entanto, o problema pode ficar cada vez mais difícil de ser integrado.

Em alguns casos é mais simples utilizar o conceito de potencial gravitacional para calcular $\vec{g}$.

Lembrando que p/ o caso de forças conservativas (que é o caso da gravitacional)

$$\vec{g} \equiv -\nabla\phi \quad \text{pois} \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0}$$

Será a condição p/ definir a função ϕ.

Sendo $\vec{g}$ radial, $\vec{\nabla}\phi = \frac{d\phi}{dr}\hat{e}_r = \frac{GM}{r^2}\hat{e}_r$

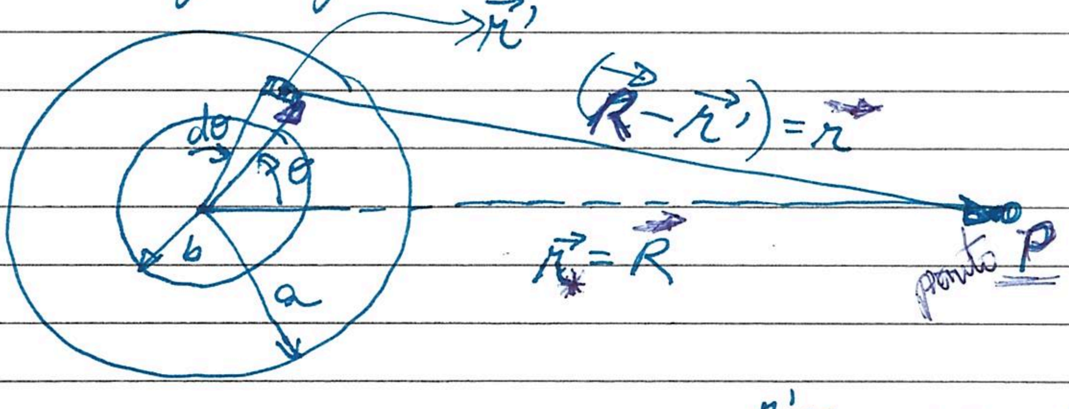
e $\boxed{\phi = -\frac{GM}{r}}$ * (massa pontual).

* Lembrando que o potencial é definido a menos de uma constante de integração. Podemos calcular neste caso $\phi(\vec{r} \to \infty) = 0$ ∴

P/ uma distribuição de massas temos:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = -G\int \frac{\rho(\vec{r}\,')\,dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}$$

Podemos calcular um caso importante, o potencial gravitacional de uma casca esférica e depois encontrar o campo gravitacional.



$$\phi = -G \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{r} dV' = -G \int_{r'=b}^{r'=a} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\rho r'^2 \operatorname{sen}\theta d\theta dr' d\varphi'}{r}$$

Note que $r \neq r'$. Por simetria, vemos que a a distribuição de massa no ângulo φ contribui de forma igual e podemos integrar diretamente $\int d\varphi' = 2\pi$

No entanto, os limites de dr' não dependem de onde o ponto P se encontra

1) P/ P fora da casca Esfera, temos:

$$\phi(R>a) = -2\pi \rho G \int_{r'=b}^{r'=a} r'^2 dr' \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta \, d\theta}{r}$$

Note que r depende de θ, desta forma, podemos reescrevê-lo em termos da lei dos cossenos:

$$(\vec{R}-\vec{r}')\cdot(\vec{R}-\vec{r}')$$
$''$
$$r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R\cos\theta$$ $\rightarrow$ derivando em relação a θ.

$\therefore\ 2r\,dr = 2r'R\,\text{sen}\,\theta\,d\theta \Rightarrow \dfrac{\text{sen}\,\theta\,d\theta}{r} = \dfrac{dr}{r'R}$

$$\phi(R>a) = -\frac{2\pi\rho G}{R}\int_{r'=b}^{r'=a} r'dr' \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr$$

No caso de P fora será $\begin{cases} r_{max} = R+r' \\ r_{min} = R-r' \end{cases}$

$$\therefore\ \phi(R>a) = \frac{-2\pi\rho G}{R}\int_{r'=b}^{r'=a} r'dr' \underbrace{\int_{R-r'}^{R+r'} dr}_{2r'}$$

$$= \frac{-4\pi\rho G}{R}\int_{b}^{a} r'^2 dr'$$

$$\therefore\ \boxed{\phi(R>a) = -\frac{4}{3}\frac{\pi\rho G}{R}(a^3-b^3)}$$

Sabendo que $M = \dfrac{4}{3}\pi\rho\,\underbrace{(a^3-b^3)}_{V}$

$$\therefore\ \boxed{\phi(R>a) = -\frac{MG}{R}}$$

Note: Este é o potencial de uma partícula pontual de massa M calculado à uma distância R.

Ou seja o potencial gravitacional gerado por uma distribuição esférica de massa é sentido por uma partícula externa a esta distribuição como se toda a massa estivesse localizada em um único ponto infinitesimal no centro

Newton levou 20 anos para obter esta solução. Você pode obter este resultado em 20 minutos.

(2) Para um ponto P interno a casca esférica

[Os limites de integração mudam]

$$\phi(R<b) = -\frac{2\pi\rho G}{R}\int_b^a r'dr'\underbrace{\int_{r'-R}^{r'+R} dr}_{2R}$$

$$\therefore \phi(R<b) = -4\pi\rho G\int_b^a r'dr'$$

$$\boxed{\phi(R<b) = -2\pi\rho G\left(a^2-b^2\right)}$$

Note que o potencial é constante em qualquer ponto interno à casca!

(3) p/ o caso R na casca, usamos a expressão p/ $\phi(R<b)$ e $\phi(R>a)$ com os limites de integração trocados e somamos os resultados:

$$\phi(R<b)_{p/\,b=R} = \frac{-2\pi\rho G}{R}\int_R^a r'dr'\,(2R) = -2\pi\rho G(a^2-R^2)$$

$$\phi(R>a)_{p/\,a=R} = -\frac{4}{3}\frac{\pi\rho G}{R}(R^3-b^3)$$

$$\therefore \phi(b<R<a) = -\frac{4}{3}\frac{\pi\rho G}{R}(R^3-b^3) - 2\pi\rho G(a^2-R^2)$$

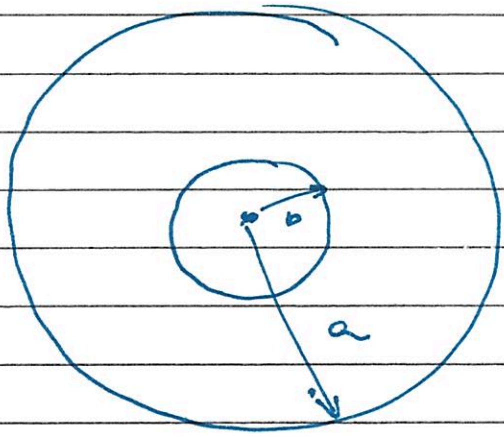
$$\therefore \boxed{\phi(b<R<a) = -4\pi\rho G\left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3R} - \frac{R^2}{6}\right)}$$

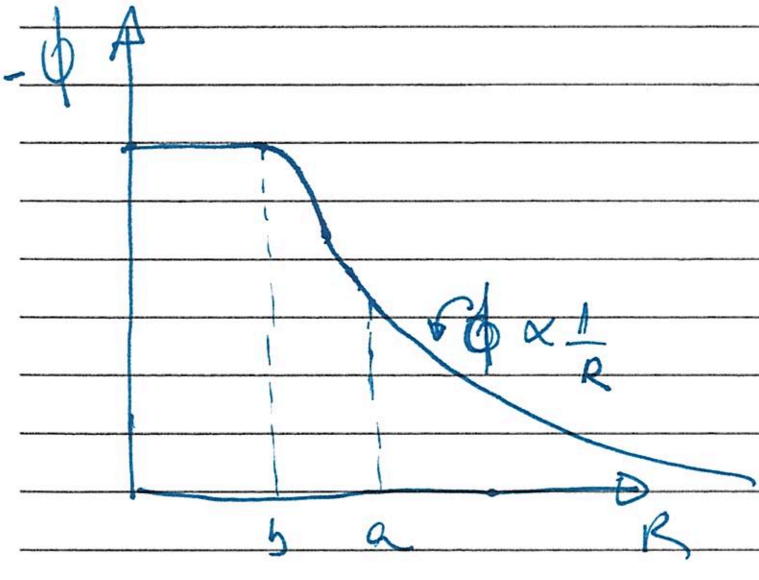
Note que o potencial é contínuo, pois quando fazemos $R\to a$ recuperamos o resultado p/ $\phi(R>a)$ no limite e $R\to b$ recuperamos o resultado p/ o interior da casca.

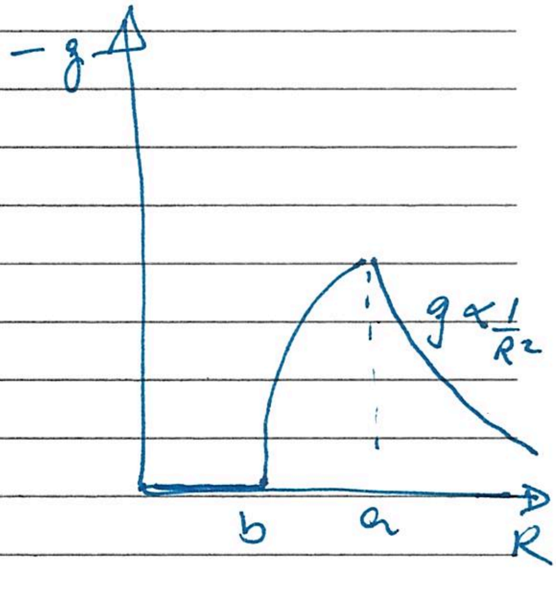
Se quisermos agora obter $\vec{g}$, sabemos que o mesmo será radial e portanto,

$$\vec{g} = -\nabla\phi = -\frac{d\phi}{dR}\,\hat{r}$$

$$\begin{cases} \vec{g}(R<b) = 0 \Leftarrow \dfrac{d}{dR}\left[-2\pi\rho G\left(a^2-b^2\right)\right] = 0 \\[2ex] \vec{g}(b<R<a) = \dfrac{4}{3}\pi\rho G\left(\dfrac{b^3}{R^2} - R\right)\hat{R} \\[2ex] \vec{g}(R>a) = -\dfrac{GM}{R^2}\hat{R} \end{cases}$$



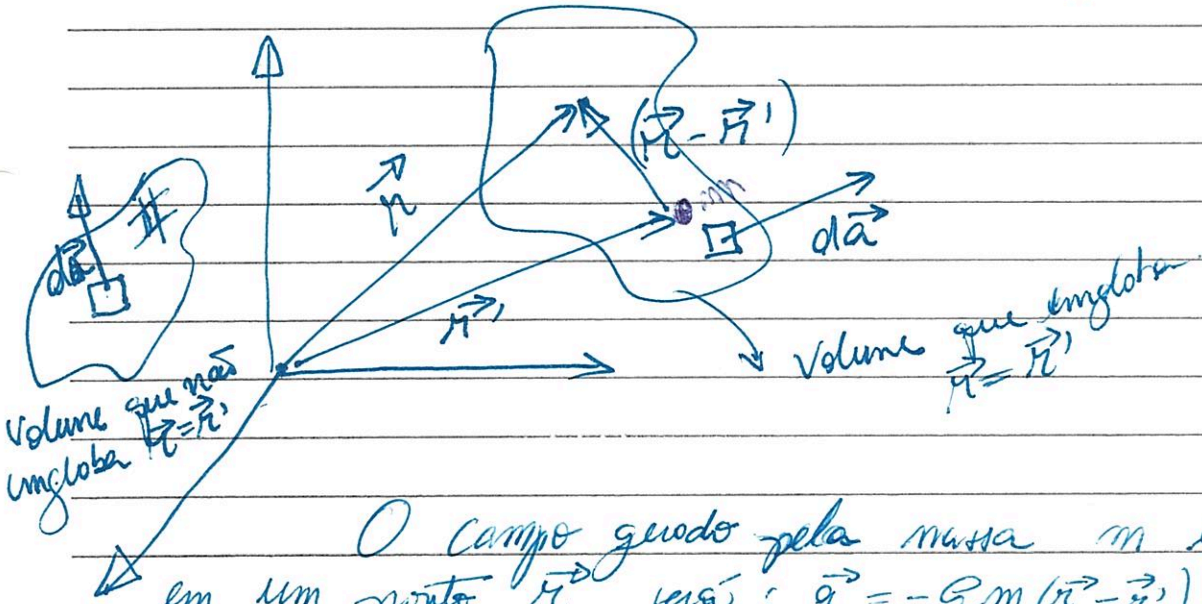




"Lei de Gauss" p/ campos gravitacionais

Equação de Poisson

Considere uma massa m em $\vec{r}\,'$ conforme a figura:



O campo gerado pela massa m em $\vec{r}\,'$ em um ponto $\vec{r}$ será: $\vec{g} = -Gm\dfrac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|r-r'|^3}$

Se quizermos calcular o "fluxo" de $\vec{g}$ na superfície que envolve V, teremos pelo teorema de Gauss

$$\oint_S \vec{g}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{g}\,dv$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = -Gm\left[(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right) + \frac{\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]$$

Lembrando que se $\vec{A} = f\vec{B}$ onde f é uma função escalar e $\vec{B}$ é um vetor; $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{B}\cdot\vec{\nabla}f + f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$

p/ $\vec{r} \neq \vec{r}'$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{g}$ pode ser calculado.

O segundo termo será:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{\partial}{\partial x}(x-x') + \frac{\partial}{\partial y}(y-y') + \frac{\partial}{\partial z}(z-z')$$

$$= 3$$

$$\therefore \boxed{\frac{\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{3}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$

O primeiro termo fica:

$$\nabla\left(\frac{1}{|r-r'|^3}\right) = ?$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^{-3} = \left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{-3/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}|\vec{r}-\vec{r}'|^{-3} = -\frac{3}{\cancel{2}}\left[\quad\right]^{-5/2}\cancel{2}\,(x-x')$$

Será análogo p/ $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial z}$

$$\therefore \boxed{\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right) = \frac{-3\,(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5}}$$

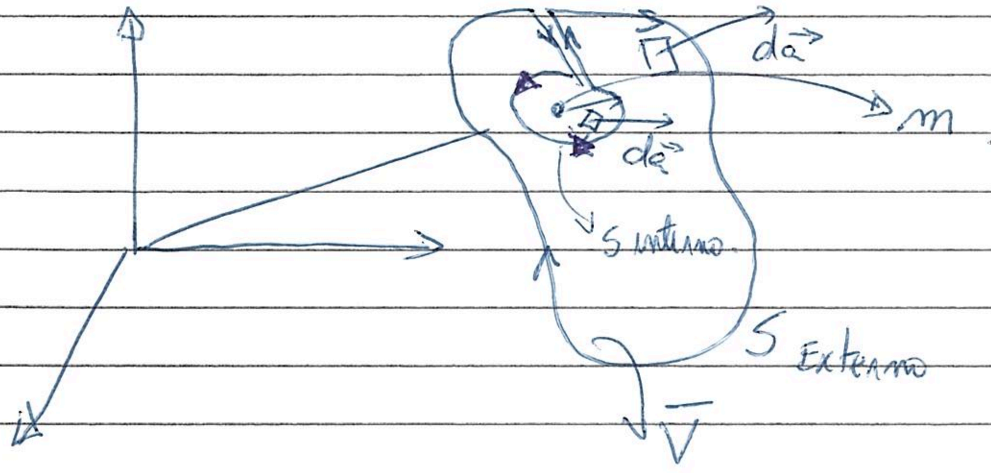
$$\therefore (\vec{r}-\vec{r}')\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{3}}\right) = \frac{-3}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{3}}$$

Portanto, p/ $\vec{r} \neq \vec{r}'$ $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{g}=0}$

Portanto, se o volume não englobar a massa,

$$\int_S \vec{g}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{g}\, dv = 0$$

Se o volume englobar a massa, temos que encontrar um caminho, tal que a ~~massa fique da força~~ no limite $\vec{r}=\vec{r}'$ este ponto não seja incluído.



Agora, segundo o teorema de Gauss:

$$\oint_{S_{ext}+S_{int}} \vec{g}\cdot d\vec{a} = \int_{\bar{V}} \vec{\nabla}\cdot\vec{g}\, dv = 0$$

$\bar{V} = V - V_{esfera}$ raio pequeno.

$$\therefore \int_{S_{Ext}} \vec{g} \cdot d\vec{a} + \int_{S_{int}} \vec{g} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$\therefore \int_{S_{Ext}} \vec{g} \cdot d\vec{a} = -\underbrace{\int_{S_{int}} \vec{g} \cdot d\vec{a}}$$

Note que a esfera de raio pequeno pode ser.

$$\vec{R} = \delta R \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\therefore d\vec{a} = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} da$$

Na esfera; $\vec{g} = \vec{g}(\vec{R}) = -\frac{Gm\,\vec{R}}{R^3} = -\frac{Gm}{\delta R^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$

$$\therefore \vec{g}(\vec{R}) \cdot d\vec{a} = +\frac{Gm\,da}{\delta R^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')^2}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2} = +\frac{Gm\,da}{\delta R^2}$$

$$\therefore \int_{S_{int}} \vec{g} \cdot d\vec{a} = +\frac{Gm}{\delta R^2} \int_{S_{int}} da = \frac{Gm\,4\pi\,\cancel{\delta R^2}}{\cancel{\delta R^2}}$$

$$\therefore \boxed{\int_{S_{Ext}} \vec{g} \cdot d\vec{a} = -4\pi G\, m_{envolvida}} \rightarrow \text{Lei de Gauss p/ campos grav.}$$

Lembrando que $\int_{S(V)} \vec{g} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g}\, dv$

$\therefore \int_V \left(\vec{\nabla} \cdot g + 4\pi G \rho\right) dv = 0$

$\therefore \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho}$ Note a similaridade com a Lei de Gauss p/ o caso de eletromagnetismo

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Se lembrarmos que $\vec{g} = -\nabla \phi$

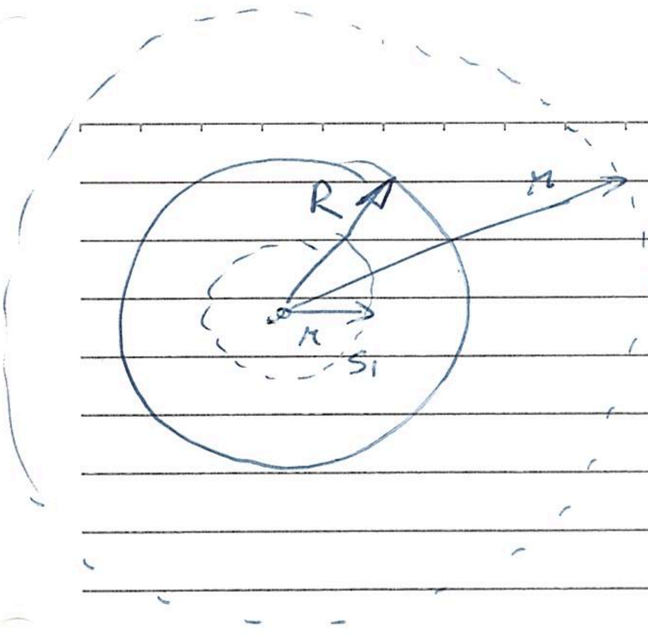
então $\therefore -\vec{\nabla} \cdot (\nabla \phi) = -4\pi G \rho$

$\therefore \boxed{\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho} \Rightarrow$ Equação de Poisson.

Se $\rho = 0 \rightarrow \boxed{\nabla^2 \phi = 0} \Rightarrow$ Equação de Laplace.

Podemos agora obter os resultados anteriores de forma mais simples com este "ferramental" matemático.

Ex 1// Caso da esfera de raio R com densidade de massa uniforme.



Por simetria

$$\vec{g}(\vec{r}) = g(r)\,\hat{r}$$

$$\int_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = g(r) \int da$$

S esfera concentrica de raio r

$$g(r) \int da = 4\pi r^2 g(r)$$

p/ $r < R$ $\quad M_{\text{envolvida}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

$$\cancel{4\pi} r^2 g(r) = -G \cancel{4\pi}\, \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$g(r) = -\frac{4}{3}\pi r \rho$$

$$\boxed{\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{4}{3}\pi \rho\, \vec{r}}$$

Obs! como o buraco ficaria

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{4}{3}\pi \rho G \left(\frac{b^3}{r^2} - r\right)\hat{r}$$

p/ $r > R$ $\quad M_{\text{envolvendo}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = M$

$$\therefore g(r) \cancel{4\pi} r^2 = G \cancel{4\pi} M \Rightarrow \boxed{g(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\,\hat{r}}$$

Como esperado, campo identico ao de uma massa pontual em $\vec{r} = 0$.