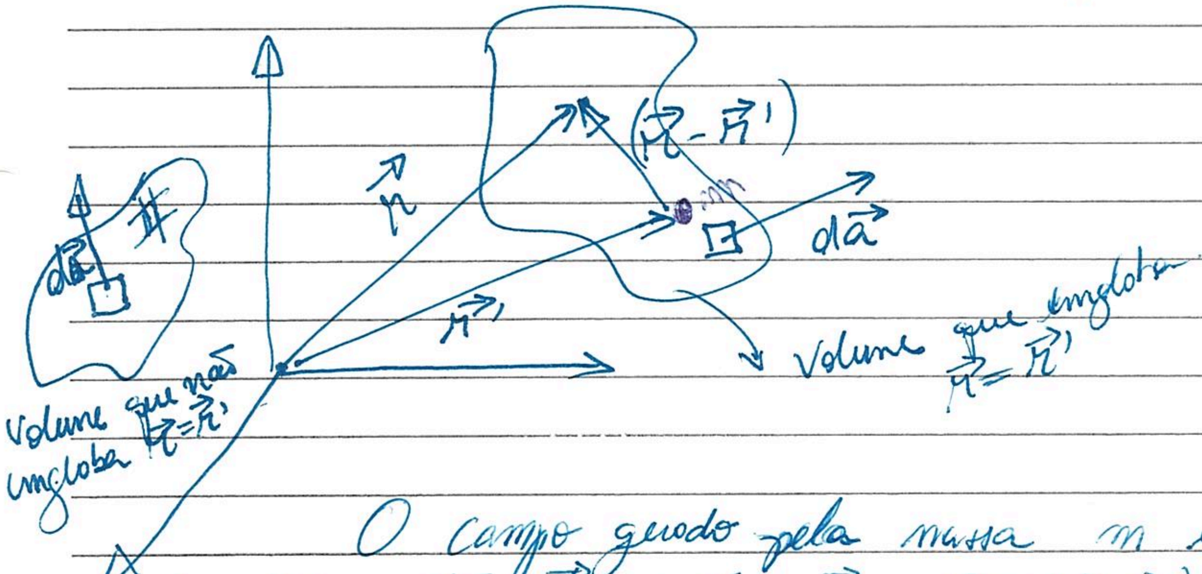
"Lei de Gauss" p/ campos gravitacionais

Equação de Poisson

Considere uma massa m em $\vec{r}'$ conforme a figura:



O campo gerado pela massa m em $\vec{r}'$ em um ponto $\vec{r}$ será: $\vec{g} = -G\dfrac{m(\vec{r}-\vec{r}')}{|r-r'|^3}$

Se quisermos calcular o "fluxo" de $\vec{g}$ na superfície que envolve V, teremos pelo teorema de Gauss

$$\oint_S \vec{g}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{g}\, dv$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = -Gm\left[(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right) + \frac{\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]$$

Lembrando que se $\vec{A} = f\vec{B}$ onde f é uma função escalar e $\vec{B}$ é um vetor; $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{B}\cdot\vec{\nabla}f + f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$

p/ $\vec{r} \neq \vec{r}'$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{g}$ pode ser calculado.

O segundo termo será:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\partial}{\partial x}(x - x') + \frac{\partial}{\partial y}(y - y') + \frac{\partial}{\partial z}(z - z')$$

$$= 3$$

$$\therefore \boxed{\frac{\vec{\nabla} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{3}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}$$

O primeiro termo fica:

$$\nabla \left(\frac{1}{|r - r'|^3} \right) = ?$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-3} = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-3/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} |\vec{r} - \vec{r}'|^{-3} = -\frac{3}{\cancel{2}} \left[\quad \right]^{-5/2} \cancel{2} (x - x')$$

Será análogo p/ $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial z}$

$$\therefore \boxed{\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = \frac{-3 (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5}}$$

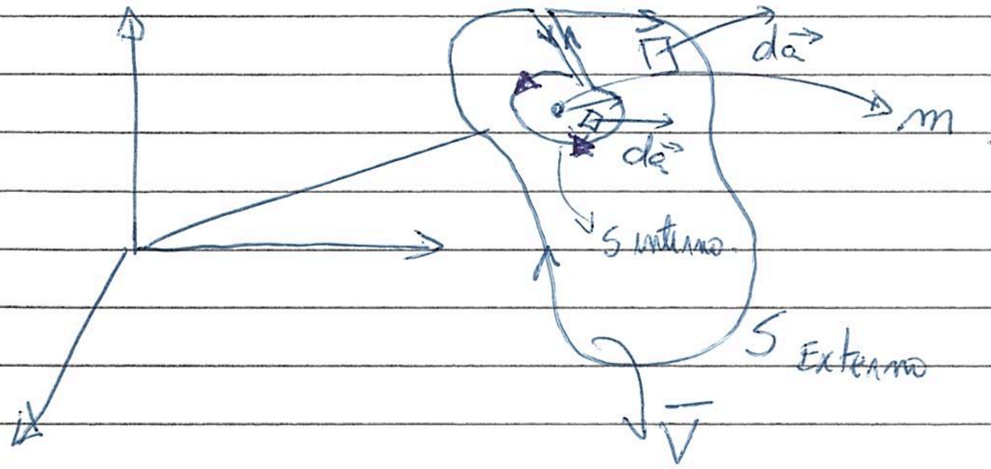
$$\therefore (\vec{r}-\vec{r}) \cdot \nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right) = \frac{-3}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Portanto, p/ $\vec{r} \neq \vec{r}'$ $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{g}=0}$

Portanto, se o volume não englobar a massa,

$$\int_S \vec{g}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{g}\, dv = 0$$

Se o volume englobar a massa, temos que encontrar um caminho, tal que a ~~massa~~ ~~fique~~ ~~da~~ ~~força~~ no limite $\vec{r}=\vec{r}'$ este ponto não seja incluído.



Agora, segundo o teorema de Gauss:

$$\int_{S_{ext}+S_{int}} \vec{g}\cdot d\vec{a} = \int_{\bar{V}} \vec{\nabla}\cdot\vec{g}\, dv = 0$$

$\bar{V} = V - V_{esfera}$ raio pequeno.

$$\therefore \int_{S_{Ext}} \vec{g} \cdot d\vec{a} + \int_{S_{int}} \vec{g} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$\therefore \int_{S_{Ext}} \vec{g} \cdot d\vec{a} = -\underbrace{\int_{S_{int}} \vec{g} \cdot da}$$

Note que a esfera de raio pequeno pode ser.

$$\vec{R} = \delta R \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\therefore d\vec{a} = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} da$$

Na esfera ; $\vec{g} = \vec{g}(\vec{R}) = -\frac{Gm\vec{R}}{R^3} = -\frac{Gm}{\delta R^2}\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$

$$\therefore \vec{g}(\vec{R}) \cdot d\vec{a} = +\frac{Gm\,da}{\delta R^2}\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')^2}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2} = +\frac{Gm\,da}{\delta R^2}$$

$$\therefore \int_{S_{int}} \vec{g} \cdot d\vec{a} = +\frac{Gm}{\delta R^2}\int_{S_{int}} da = \frac{Gm\,4\pi \cancel{\delta R^2}}{\cancel{\delta R^2}}$$

$$\therefore \boxed{\int_{S_{Ext}} \vec{g} \cdot d\vec{a} = -4\pi G\, m_{envolvida}}$$

→ Lei de Gauss p/ campos grav.

Lembrando que $\int_{S(V)} \vec{g} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g}\, dv$

$$\therefore \int_V \left(\vec{\nabla} \cdot g + 4\pi G \rho\right) dv = 0$$

$\therefore$ $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho}$ Note a similaridade com a Lei de Gauss p/ o caso de eletromagnetismo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Se lembrarmos que $\vec{g} = -\nabla \phi$

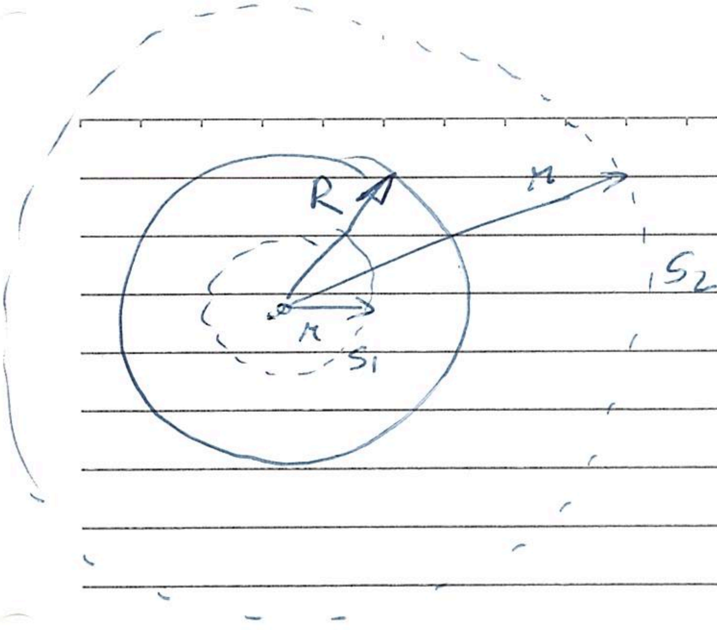
então: $-\vec{\nabla} \cdot (\nabla \phi) = -4\pi G \rho$

$\therefore$ $\boxed{\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho}$ $\Rightarrow$ Equação de Poisson.

Se $\rho = 0$ $\rightarrow$ $\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$ $\Rightarrow$ Equação de Laplace.

Podemos agora obter os resultados anteriores de forma mais simples com esta "ferramenta" matemática.

Ex 1) Caso da esfera de raio R com densidade de massa uniforme.



Por simetria

$$\vec{g}(\vec{r}) = g(r)\,\hat{r}$$

$$\int_S \vec{g}(\vec{r})\cdot d\vec{a} = g(r)\int da$$

S esfera concêntrica de raio r

$$g(r)\int da = 4\pi r^2 g(r)$$

p/ $r < R$ $\quad M_{\text{envolvida}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

$$\cancel{4\pi} r^2 g(r) = -G\cancel{4\pi}\,\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$g(r) = -\frac{4}{3}\pi r \rho$$

$$\boxed{\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{4}{3}\pi \rho\, \vec{r}}$$

Obs! como o buraco ficaria

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{4}{3}\pi\rho G\left(\frac{b^3}{r} - r\right)\hat{r}$$

p/ $r > R$ $\quad M_{\text{envolvendo}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = M$

$$\therefore g(r)\,\cancel{4\pi} r^2 = G\cancel{4\pi} M \Rightarrow \boxed{g(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\,\hat{r}}$$

Como esperado, campo idêntico ao de uma massa pontual em $\vec{r} = 0$.