Princípio de Hamilton: Formalismo Lagrangiano

Princípio de Hamilton: O sistema dinâmico movendo-se ao longo de um determinado caminho, desde o ponto A até o ponto B, extremiza (em um mínimo) a integral de energia para o funcional dado pela diferença entre a energia Cinética e o Potencial

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{(T-U)}_{f}\, dt \quad \text{seja extremo.}$$

Se escrevemos o funcional L em termos das coordenadas $x \rightarrow t$; $y_i(x) \rightarrow x_i(t)$; $y'_i(x) \rightarrow \dot{x}_i(t)$ temos.

$$f\{y_i(x), y'_i(x); x\} \longrightarrow L(x_i, \dot{x}_i; t)$$

Desta forma, a equação de Euler-Lagrange p/ este funcional em particular ficará:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0}$$

$i = 1, 2, 3$ correspondendo, por exemplo às coordenadas x, y, z.

↳ Equação de Movimento de Lagrange.

$L \rightarrow$ Função de Lagrange ou Lagrangeano.

Note que não definimos qualquer sistema de coordenadas deve ser utilizado. Podemos portanto ter (r, θ, ϕ) ou (x, y, z) ou outro sistema qualquer de coordenadas apropriado à simetria do problema em questão.

Exemplo 1: (x,y,z) caso 3D - cartesiano.

$U(x,y,z)$ ou $U(\vec{r})$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - U(x,y,z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$$

Note portanto que $\boxed{-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}(m\dot{x}_i) = 0}$ (I)

sabemos que $\vec{F} = -\vec{\nabla} U(x,y,z) = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right)$

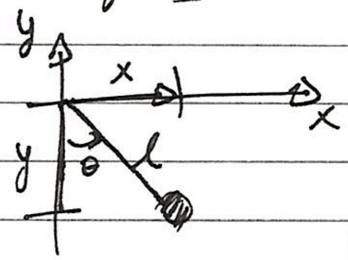
e $\vec{p} = m\vec{v}$ ou $p_i = m v_i$

Desta forma, a equação (I) nos dá: $\boxed{\frac{d}{dt} p_i = F_i}$

ou seja, a Eq. da 2º Lei de Newton.

Note que na equação de Newton, necessitamos conhecer todas as forças ou, de fato, a resultante para resolvermos a equação de movimento. Já no formalismo de Hamilton-Lagrange, basta conhecer como descrever a energia cinética e potencial das partículas em um sistema apropriado de coordenadas.

Exemplo 2: Caso do pendulo planar:



Se $l = cte$ então:

$$x^2+y^2=l^2$$ (As variáveis x e y estão vinculadas!)

$$U = mgy$$ (como vamos usar Eq. diferenciais, não importa a escolha da origem de U. Façamos que $U(0)$ no pivô do pendulo seja $U(0)=0$)

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$$

$$x=\sqrt{l^2-y^2} \quad \therefore \quad \dot{x}=\frac{-y\dot{y}}{\sqrt{l^2-y^2}}$$

$$U=mgy \; ; \; T=\frac{1}{2}m\left(\frac{y^2\dot{y}^2}{(l^2-y^2)}+\dot{y}^2\right)$$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2\left(\frac{y^2}{l^2-y^2}+1\right)}$$

Poderíamos prosseguir e obter as equações de movimento para x e y em coordenadas Cartesianas usando a Eq. de Lagrange. Isto seria no entanto muito mais trabalhoso do que usar um sistema de coordenadas apropriado como o de coordenadas polares.

$$x = l\,\text{sen}\,\theta \qquad dy = l\,\text{sen}\,\theta\, d\theta \Rightarrow \frac{dy}{dt} = l\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta} = \dot{y}$$

$$y = l\cos\theta \qquad dx = l\cos\theta\, d\theta \qquad \frac{dx}{dt} = l\cos\theta\,\dot{\theta} = \dot{x}$$

$$\therefore \; T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(l^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + l^2 \operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\theta}^2\right)$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m\,l^2\dot{\theta}^2}$$

ATENÇÃO AQUI COM O SINAL DE U

$$L = L(\theta(t);\dot{\theta}(t)) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \left[-mgl\cos\theta\right]$$

Como $y<0$ temos o sinal menos

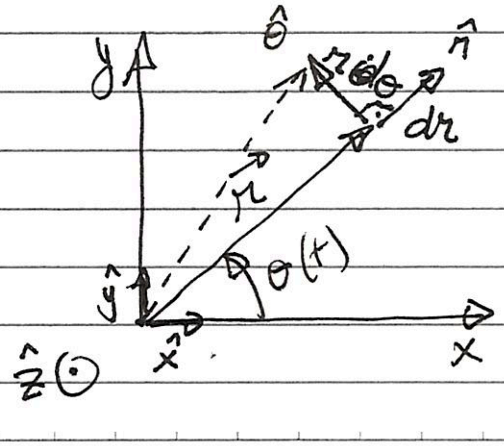
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \end{cases}$$

$$-\cancel{m}gl\operatorname{sen}\theta - \cancel{m}\frac{d}{dt}\left(l^2\dot{\theta}\right) = 0$$

$$l^2\ddot{\theta} + gl\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0}$$

Equação do pendulo simples que podemos resolver trivialmente no caso de $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$ (pequenas oscilações)

<u>Exemplo 3</u> Considerando o problema no plano p/ um potencial genérico $U(r,\theta)$ e em coordenadas polares:



$$d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\, \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right)$$

$$U = U(r, \theta)$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right) - U(r, \theta)$$

As equações de movimento serão:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \qquad -\frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(m r^2 \dot{\theta}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \qquad -\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(m \dot{r}\right) + m r \dot{\theta}^2 = 0$$

Em coordenadas polares:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = \left(\overbrace{-\frac{\partial U}{\partial r}}^{F_r} \hat{r} \overbrace{- \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}}^{F_\theta} \hat{\theta}\right)$$

Vamos relembrar o que é torque e momento angular:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta}\right) = \frac{-1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \left(\vec{r} \times \hat{\theta}\right)$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{z} \equiv N_z \hat{z}$$

↳ Torque na direção $\hat{z}$

$$\vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v} = m \vec{r} \times \left(\dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}\right)$$

$$= m r^2 \dot{\theta} \left(\hat{r} \times \hat{\theta}\right) = m r^2 \dot{\theta} \hat{z} = \ell_z \hat{z}$$

↓ Momento angular.

Desta forma, a primeira equação de Lagrange nos dá a dinâmica de rotação, ou seja, relaciona o Torque com a variação do momento angular.

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = \frac{-\partial U}{\partial \theta}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} L_z = N_z}$$

L_z é o momento angular na direção z!

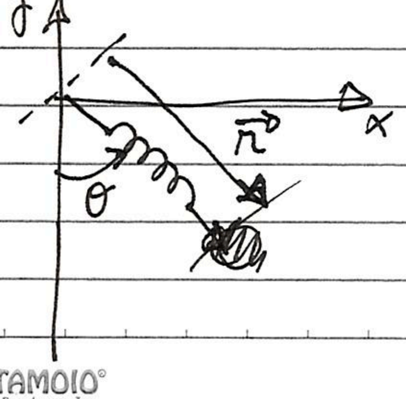
Já a segunda equação de Lagrange expressa a relação entre as forças e a dinâmica linear (Momento na direção radial).

$$\frac{d}{dt}\overbrace{P_{\text{radial}}}^{m\dot{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r} + mr\cdot\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{m\ddot{r} = F_r + \underbrace{mr\dot{\theta}^2}_{\text{força centrípeta}}}$$

Note a força centrípeta aparece naturalmente por estarmos em um sistema Não inercial!

Exemplo 4: Pendulo com l variando, por exemplo, uma mola.



$$U(r,\theta) = \frac{1}{2}k\,(r - l_0)^2 - mgr\cos\theta$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot r^2 + r^2 \dot\theta^2\right) - \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 + mgr\cos\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 0 \Rightarrow -mgr\,\text{sen}\,\theta - \dfrac{d}{dt}\left(m r^2 \dot\theta\right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial r} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot r}\right) = 0 \Rightarrow m\dot\theta^2 r - k(r - r_0) + mg\cos\theta - \dfrac{d}{dt}\left(m\dot r\right) = 0 \end{cases}$$

$$mgr\,\text{sen}\,\theta + m2r\dot r\dot\theta + mr^2\ddot\theta = 0$$

$$m\dot\theta^2 r - k(r - r_0) + mg\cos\theta - m\ddot r = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot\theta r^2 + 2r\dot r\dot\theta + gr\,\text{sen}\,\theta = 0 \\ &\ddot r - \dot\theta^2 r - g\cos\theta + \omega_0^2 (r - r_0) = 0 \\ &\qquad\hookrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}}$$

Eq. diferenciais acopladas e não homogêneas!