Sistema de Coordenadas Generalizadas

Em um sistema físico de N partículas em geral há 3N coordenadas cartesianas ($x_1, y_1, z, \ldots x_n, y_n, z_n$); precisamos destas 3N coordenadas para descrever a posição das mesmas, e portanto, $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{F}$, ...

É óbvio que ainda podem existir vínculos. Por exemplo, se é um corpo rígido, a distância entre as partículas está fixa, de forma a reduzir drasticamente o número de coordenadas necessárias para descrever o sistema (por exemplo, descrevendo o movimento do centro de massa e a rotação em torno de um eixo)..

Ou ainda, se a partícula move sobre a superfície, por exemplo de um plano com $z = cte$, temos que utilizar apenas 2 coordenadas (x, y) ou (r, θ) ou algum outro par de coordenadas apropriadas.

Para um conjunto generalizado de coordenadas, que nem mesmo necessita ser ortogonal, podemos escrever a transformação de coordenadas:

$$q_1 = q_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n; t)$$

onde n indica a partícula

$$q_2 = q_2(x_1, y_1, \ldots \ldots, z_n; t)$$

$$\vdots$$

$$q_{3N} = q_{3N}(x_1, y_1, \ldots \ldots, z_n; t)$$

Claramente podemos escrever as coordenadas $q_1, \dots q_{3N}$ na base de coordenadas cartesianas e vice-versa:

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots q_{3N}; t)$$

$$y_1 = y_1(q_1, q_2, \dots q_{3N}; t)$$

$$\vdots$$

$$z_n = z_n(q_1, \dots q_{3N}; t)$$

A condição matemática p/ que esta solução seja possível será que o determinante Jacobiano seja diferente de zero.

$$\frac{\partial(q_1, \dots q_{3N})}{\partial(x_1, \dots z_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial y_1} & \frac{\partial q_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial y_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial q_1}{\partial z_n} & \frac{\partial q_2}{\partial z_n} & \dots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial z_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Em um sistema de coordenadas generalizadas associa-se $\dot{q}_k$ como sendo a velocidade generalizada à coordenada q_k.

Exemplo $\dot{x}_i$ é a vel. generalizada p/ x_i

$\dot{\theta}$ " " " " θ

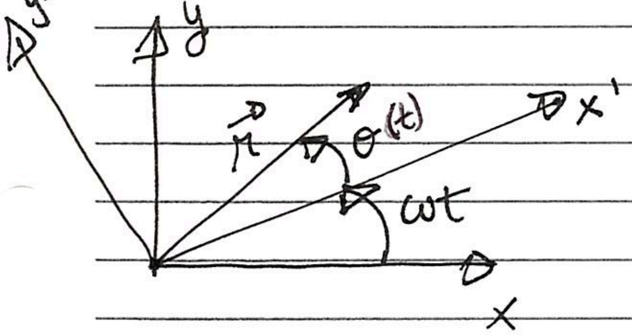
$\dot{r}$ " " " " r

Desta forma, podemos escrever a velocidade generalizada através da seguinte transformação.

$$\dot{x}_1 = \frac{d}{dt}\left[x_1(q_1, q_2, \dots ; t)\right] = \frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

$$\therefore \begin{cases} \dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{3M} \frac{\partial x_1}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \dot{z}_M = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_N}{\partial q_k} q_k + \frac{\partial z_N}{\partial t} \end{cases}$$

Exemplo: Para o caso de coordenadas polares em movimento.



$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x} - \omega t\right)$$

$$x = r\cos(\theta + \omega t)$$
$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta + \omega t)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \rightleftarrows \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ t \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos(\theta+\omega t) - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}(\theta+\omega t) - r\omega\,\mathrm{sen}(\theta+\omega t)$$
$$\dot{y} = \dot{r}\,\mathrm{sen}(\theta+\omega t) + r\dot{\theta}\cos(\theta+\omega t) + r\omega\cos(\theta+\omega t)$$

Note que a energia cinética que usamos utilizado no lagrangiano é:

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2\right)$$

Que ficará em termos de coordenadas generalizadas

$$T=\sum_{k=1}^{3N}\sum_{l=1}^{3N}A_{kl}\,\dot{q}_k\,\dot{q}_l+\sum_{k=1}^{3N}B_k\,\dot{q}_k+T_0$$

$$A_{kl}=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_l}+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\right)$$

$$B_k=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)$$

$$T_0=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\right]$$

Note que se A_{kl} for $\neq 0$ apenas p/ $k=l$ então as coordenadas são de sistemas ortogonais e B_k e T_0 são <u>zero</u>. Portanto t não aparece explicitamente na definição de q_i

Desta forma o caso geral nos dará:

$T = T_2 + T_1 + T_0$

T_0 → termo indep. das vel. generl.

T_1 → Termos lineares

T_2 → termos quadráticos das vel. generalizadas.

T_1 e T_0 só aparecem em sistemas de coord em movimento.

No exemplo ~~anterior~~ 4, pg 206, temos:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \therefore T = \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)}_{\text{apenas } T_2}$$

já p/ o exemplo da página 210, com coordenadas em movimento.

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left\{\left[\dot{r}\cos(\theta+\omega t) - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}(\theta+\omega t) - r\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta)\right]^2\right.$$

$$\left. + \left[\dot{r}\,\mathrm{sen}(\theta+\omega t) + r\dot{\theta}\cos(\theta+\omega t) + r\omega\cos(\theta+\omega t)\right]^2\right\}$$

⋮ voce pode mostrar que

$$\boxed{T = \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)}_{T_2} + \underbrace{mr^2\omega\dot{\theta}}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2}mr^2\omega^2}_{T_0}}$$

Fisicamente T_0 e T_1 estão ligados à rotação e "força de Coriolis".

T_1 e T_0 só aparecem em sistemas de coord. em movimento.

<u>Nota</u>: Na página 185, encontramos:

$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ p/ o sistema fixo, desta forma:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)}$$

Já p/ o sistema em movimento temos:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\Big\{\left[\dot{r}\cos(\theta+\omega t) - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}(\theta+\omega t) - r\omega\,\mathrm{sen}(\theta+\omega t)\right]^2$$

$$+ \left[\dot{r}\,\mathrm{sen}(\theta+\omega t) + r\dot{\theta}\cos(\theta+\omega t) + r\omega\cos(\theta+\omega t)\right]^2\Big\}$$

$\vdots$ (você pode mostrar ...)

$$\boxed{= \frac{1}{2}\left(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2\right) + mr^2\omega\dot{\theta} + \frac{1}{2}mr^2\omega^2}$$

<u>Nota</u> $\Longrightarrow$

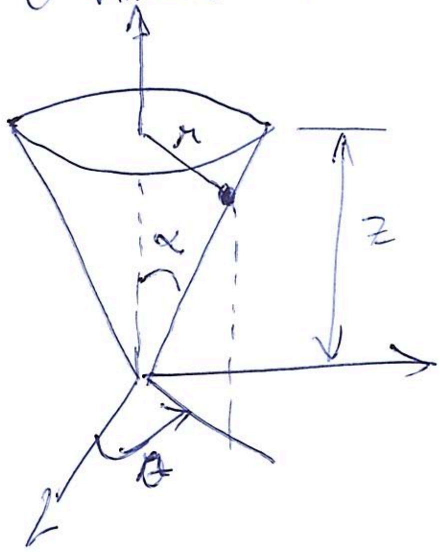
- Termo com ② das velocidades generalizadas
- termo linear com a velocidade generalizada $\dot{\theta}$
- termo independente de $\dot{r}$ ou $\dot{\theta}$

Exploraremos o significado físico de cada termo posteriormente. Uma análise rápida mostra que p/ $\omega = 0$ (sistema de referência parado) recuperamos o caso da página <u>185</u>.

Os novos termos são devido à energia de rotação e "força de Coriolis" [voltaremos a isto na pg. 202

Ex. 7.4 livro : Partícula em um cone, sempre em contato com a parede do cone:

O vínculo será:



$$\frac{z}{r} = \operatorname{ctg}\alpha$$

Usando coordenadas cilíndricas (polar + z) temos:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$U = mgz$ fazendo $U=0$ p/ a origem!

$$\dot{z} = \dot{r}\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\therefore T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\operatorname{cotg}^2\alpha\right) = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1 + \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right) + r^2\dot{\theta}^2\right]$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$U = mgr\operatorname{ctg}\alpha$$

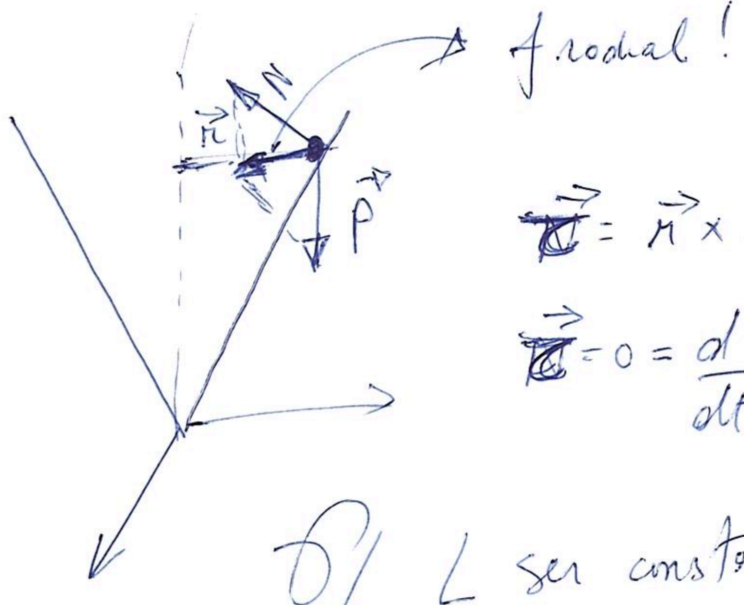
$L = T - U$ Note que L não contém θ ∴ Na equação em θ:

$$\cancel{\frac{\partial L}{\partial \theta}}^{\,0} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \text{ ou } \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = cte}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \underbrace{m r^2 \dot{\theta}}_{\mathbb{L}\ (\text{momento angular!})} = cte$$

O momento angular a direção $\hat{z}$ se conserva! ou seja! Não existe torque nesta direção!

O vínculo de manter-se no cone, funciona como uma força radial devido à combinação do peso e a normal!



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f}_{radial} = 0 \quad \underbrace{(\hat{r} \times (-\hat{r}))}_{0}$$

$$\vec{\tau} = 0 = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{L} = cte}$$

P/ L ser constante, conforme a partícula desce, r fica menor $\Rightarrow$ que a velocidade angular! aumenta na mesma proporção!

p/ a variável r teremos!

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0$$

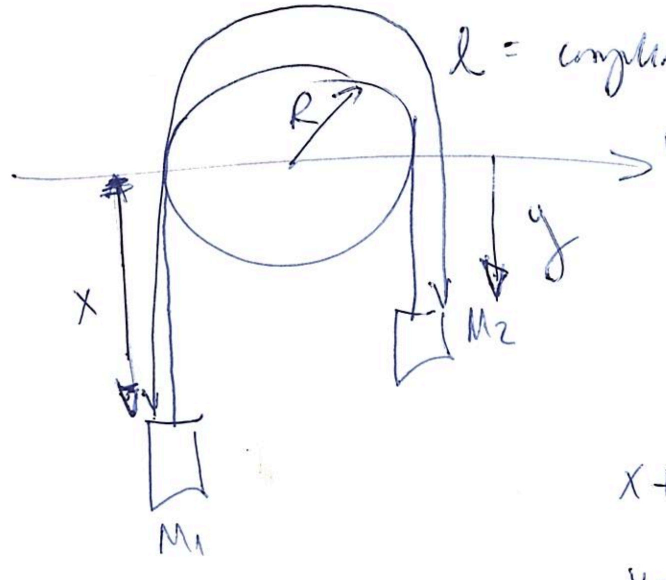
$$\Rightarrow \cancel{m} r \dot{\theta}^2 - \cancel{m} g \operatorname{ctg}\alpha - \frac{d}{dt}\left(\cancel{m} \dot{r} \csc^2\alpha\right) = 0$$

$$\ddot{r} \csc^2\alpha + g \operatorname{ctg}\alpha - r\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\boxed{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2\alpha + g \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = 0}$$

→ Mais detalhes da resolução desta equação de movimento será explorado em F 415 (seção 8.10 do livro)

Exemplo Polia | (Máquina de Atwood.



l = comprimento não extensível.

Usando duas variáveis e um vínculo:

$$x + y + \pi R = l$$

$$y = l - \pi R - x$$

$$\dot{y} = -\dot{x}$$

$$U = -m_1 g x - m_2 g y = -m_1 g x - m_2 g (l - \pi R - x)$$

$$U = -gx(m_1 - m_2) - m_2 g(l - \pi R)$$

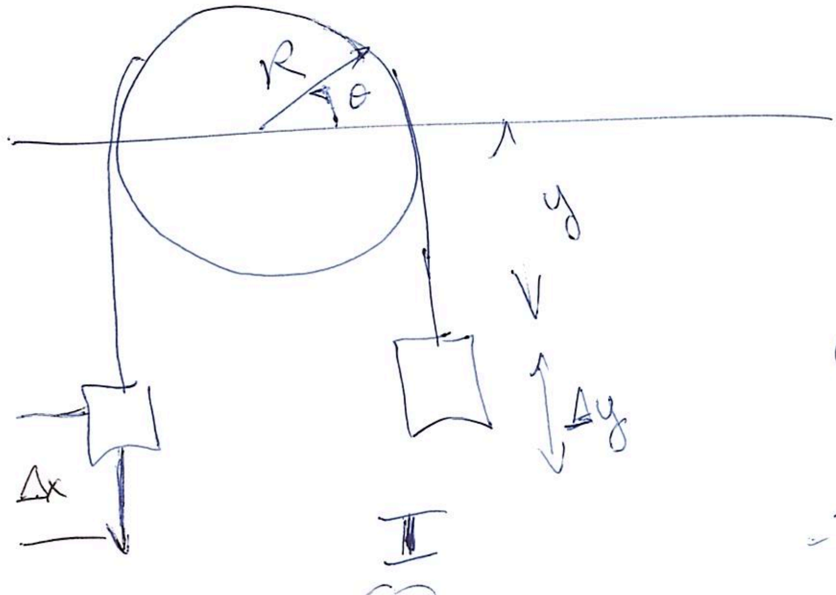
$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 \dot{x}^2 + m_2 \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2$$

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + gx(m_1 - m_2) + m_2 g(l - \pi R)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Rightarrow g(m_1 - m_2) - \frac{d}{dt}\left((m_1 + m_2)\dot{x}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{(m_1 - m_2)\,g}{(m_1 + m_2)} = a}$$

Considerando massa p/ a polia: $\underline{M}$



$$R\theta = \frac{x - y}{2}$$

$$\theta = \frac{2x - l + \pi R}{2R}$$

$$\therefore \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R}$$

$$T_M = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{M\cancel{R^2}}{4}\frac{\dot{x}^2}{\cancel{R^2}} + gx(m_1 - m_2)$$

$$\frac{\partial \cancel{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,2\dot{x} + \frac{M\cancel{2}\dot{x}}{\cancel{4}2} \rightarrow = \dot{x}\left(m_1+m_2+\frac{M}{2}\right)$$

$$g\,(m_1-m_2) - \left(m_1+m_2+\frac{M}{2}\right)\ddot{x} = 0$$

$$\therefore \boxed{\ddot{x} = \frac{g\,(m_1-m_2)}{\left(m_1+m_2+\frac{M}{2}\right)}}$$