$$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = dx^2 + dy^2$$

$d = \int_{\Gamma} (dx^2 + dy^2)^{1/2}$; podemos escrever esta integral apenas como função de x pois

$$d = \int dx \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} = \int_{x_1}^{x_2} [1 + y'^2]^{1/2} dx = J$$

Podemos agora identificar o funcional como:

$f \equiv [1 + y'^2]^{1/2}$ (Note que f é função apenas de y' neste caso)

Apliquemos a Equação de Euler:

$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ pois $f(y')$ apenas!

$\therefore -\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y'} = C_1$

$\frac{\partial f}{\partial y'} = C_1 = \frac{1}{\cancel{2}}[1 + y'^2]^{-1/2} \cancel{2} y'$ $\therefore$

$C_1 (1 + y'^2)^{1/2} = y' \Rightarrow C_1^2 (1 + y'^2) = y'^2$

$\therefore y'^2 = \frac{C_1^2}{(1 - C_1^2)} \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{C_1^2}{1 - C_1^2}} = a$ (outra constante)

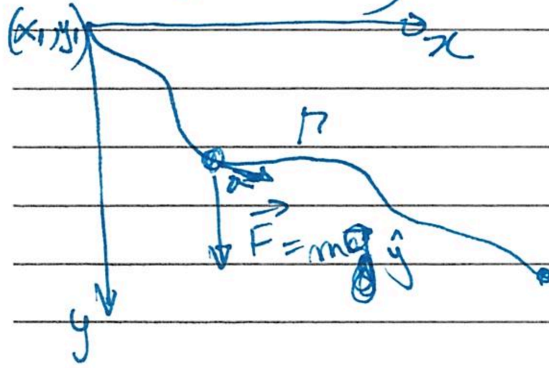
TAMOIO®
Boas Impressões

$\therefore$ $\boxed{y = ax + b}$ eq. de uma reta, como esperado!

Onde $a = \frac{c_1}{\sqrt{1-c_1^2}}$ e podendo calcular os valores com os extremos dados.

$y_1 = a x_1 + b$
$y_2 = a x_2 + b$ $\therefore$
$$\boxed{a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}$$
$$\boxed{b = y_1 - \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) x_1}$$

Exemplo 2 || Encontrar o caminho que uma partícula faz no menor tempo sob a ação de uma força constante (tipo gravitacional) Prob. da Brachistochrone).



Parte do repouso, F cte.
O caminho será $\Gamma(x(y))$

Ignorando atrito,

$$E = K + U = cte$$

Para esta condição particular, $U(y=0) = 0$

$K = \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$ $\therefore$

$$0 = \frac{1}{2}\cancel{m} v^2 - \cancel{m} g y \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

$$\vec{v} \parallel d\vec{s} \Rightarrow dt = \frac{|d\vec{s}|}{v} = \frac{ds}{v}$$

$$ds = (d\vec{s} \cdot d\vec{s})^{1/2} = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$$

$$T = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} dt = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{(dx^2+dy^2)^{1/2}}{(2gy)^{1/2}}$$

Novamente podemos fazer T uma função de integração em apenas uma variável.

$$T = \int_{y_1}^{y_2} \frac{(1+x'^2)^{1/2}}{(2gy)^{1/2}} dy \Longleftrightarrow \text{Note que } x' = \frac{dx}{dy}$$

Neste caso estamos fazendo a variável independente como sendo y e não $\underline{x}$.

$\therefore f(x, x'; \underset{\text{var. indep.}}{\underline{y}})$ ou $f(x, x'; y) = \dfrac{(1+x'^2)^{1/2}}{\sqrt{y}}$

Note que $\dfrac{1}{\sqrt{2g}}$ é apenas uma constante e não deve influenciar.

Lembre-se como foi definido a equação de Euler.

Neste caso, trocamos x por y.

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = 0$$

Como f não depende explicitamente de x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = cte \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{2x'}{(1+x'^2)^{1/2}} = cte = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

escolhido por conveniencia e ficará claro adiante!

$$\frac{x'^2}{y(1+x'^2)} = \frac{1}{2a} \Rightarrow 2ax'^2 = y + yx'^2$$

$$x'^2(2a-y) = y \Rightarrow x' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2a-y}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{y}\,\sqrt{y}}{\sqrt{2a-y}\cdot\sqrt{y}} \Rightarrow \int dx = x = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

fazendo $y = a(1-\cos\theta) \Longrightarrow dy = a\,\text{sen}\,\theta\, d\theta$

Esta escolha de transformação de variáveis não é trivial. Só saberá com um pouco de experiência...

$$x = \int \frac{a(1-\cos\theta)\,a\,\text{sen}\,\theta\, d\theta}{\left[2a^2(1-\cos\theta) - a^2(1-\cos\theta)^2\right]^{1/2}}$$

$$\left[2a^2 - \cancel{2a^2\cos\theta} - a^2 + \cancel{2a^2\cos\theta} - a^2\cos^2\theta\right]^{1/2}$$

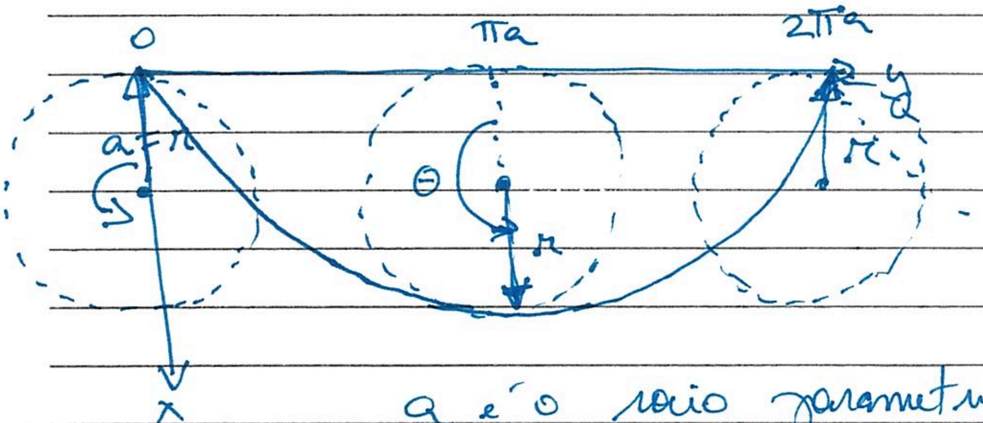
$$\left[a^2 - a^2\cos^2\theta\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \left[a^2 - a^2\cos^2\theta\right]^{1/2} = a\left(1-\cos^2\theta\right)^{1/2} = a\,\text{sen}\theta$$

$$x = \int \frac{a(1-\cos\theta)\,\cancel{a\,\text{sen}\theta}\,d\theta}{\cancel{a\,\text{sen}\theta}} = a(\theta - \text{sen}\theta) + \underbrace{\text{cte}}_{0 \text{ p/ a condição inicial!}}$$

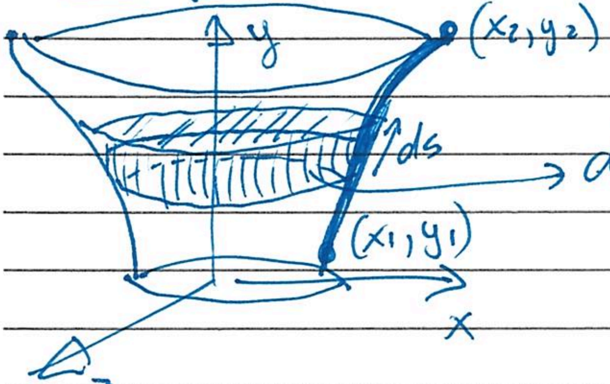
Esta será a equação da cicloide parametrizada.

$$y = a(1-\cos\theta)$$
$$x = a(\theta - \text{sen}\theta)$$



a é o raio parametrizado em θ, o que justifica a escolha inicial p/ a constante!!

Exemplo 3 | Exercício 6.3 do Marion.



Buscar a curva $y(x)$ que minimiza a área da superfície gerada pela revolução em torno de y.

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ $\quad dA = 2\pi \cancel{x}\, ds = 2\pi x \sqrt{y'^2 + 1}\, dx$

$\therefore A = \int_{x_1}^{x_2} dA = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \sqrt{y'^2 + 1}\, dx$ onde $y' = \frac{dy}{dx}$

$\therefore f = x(1 + y'^2)^{1/2}$ $\quad 2\pi$ é só uma constante que não afeta o resultado do funcional.

$\therefore$ Da eq. de Euler temos $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \therefore$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{x y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} = a = cte$

pois $\frac{d}{dx}\left[\frac{x y'}{(1+y')^{1/2}}\right] = 0$

$\therefore \frac{xy'}{(1+y'^2)^{1/2}} = a \Rightarrow x^2 y'^2 = a^2(1 + y'^2)$

$y'^2(x^2 - a^2) = a^2$

$\therefore y'^2 = \frac{a^2}{(x^2 - a^2)} \Longrightarrow y' = \frac{a}{(x^2 - a^2)^{1/2}}$

$y = \int \frac{a\, dx}{(x^2 - a^2)^{1/2}} = \int \frac{dx}{\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)^{1/2}}$

Lembremos que $\cosh^2 - \operatorname{senh}^2 = 1$ e fazendo

$\frac{x}{a} = \cosh\theta \Rightarrow dx = a \operatorname{senh}\theta\, d\theta$

$$y = \int \frac{a \,\text{senh}\,\theta \, d\theta}{(\cosh^2 - 1)^{1/2}} = \int \frac{a \cancel{\text{senh}\,\theta} \, d\theta}{\cancel{(\text{senh}^2\theta)^{1/2}}} = \int a \, d\theta$$

$y = a\theta + \text{cte} \quad \therefore \quad \boxed{y = a\theta + b}$

$$x = a\cosh\theta \Rightarrow \boxed{x = a\cosh\left(\frac{y-b}{a}\right)}$$

→ Esta é a curva da catenária.

- Uma corda flexível suspendida livremente por dois pontos!
- Uma catenoide (sup. da bolha de sabão entre aros) tem uma catenária associada).

Segunda FORMA da Eq. de Euler

Quando o funcional não depende explicitamente de x, é conveniente reescrever a eq. de Euler.

Vimos que para $f(y, y'; x)$ temos:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(y, y'; x) = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}^{=1}$$

$$\frac{df}{dx} = y'\frac{\partial f}{\partial y} + y''\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x} \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \qquad (2)$$

↳ note que este é o segundo

Combinando as duas equações

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \underbrace{\frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y}y' - \frac{\partial f}{\partial x}}_{\text{veio de (1)}} + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}$$

Reorganizando

$$\frac{d}{dx}\left[f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right] - \frac{\partial f}{\partial x} - y'\underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]}_{}=0$$

Este termo é exatamente a eq. de Euler = 0

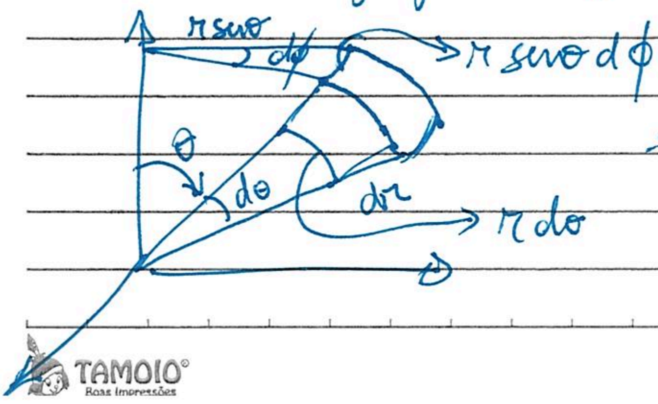
∴ ficamos portanto com:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left[f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right] = 0}$$

segunda forma p/ a Eq. de Euler.

Ex. 6.4 Marion

Geodésica: caminho de menor distância entre dois pontos sobre uma superfície (neste caso esfera).



$$d\vec{s} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\,\text{sen}\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$$

$$\therefore\ ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\,\text{sen}^2\theta\,d\phi^2$$

$$\begin{cases} x = r\,\text{sen}\theta\cos\phi \\ y = r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Como r é constante: ds fica na superfície de r constante. (Podemos considerar como condição de vínculo).

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2\theta \, d\phi^2$$

$$ds = \left[r^2\left(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta \, d\phi^2\right)\right]^{1/2}$$

$$S = r \int_1^2 \underbrace{\left[\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2 + \text{sen}^2\theta\right]^{1/2}}_{f} d\phi$$

Nota! Como r é const. não importa p/o funcional

$$f(\theta, \theta') = \left[\theta'^2 + \text{sen}^2\theta\right]^{1/2} \quad \text{p/ } \theta' = \frac{d\theta}{d\phi}$$

Como f não depende explicitamente da variável ϕ de integração; podemos usar a segunda forma da Eq. de Euler.

$$\cancelto{0}{\frac{\partial f}{\partial \phi}} - \frac{d}{d\phi}\left[f - \theta' \frac{\partial f}{\partial \theta'}\right] = 0$$

$$\therefore f - \theta' \frac{\partial f}{\partial \theta'} = cte$$

$$\left(\theta'^2 + \text{sen}^2\theta\right)^{1/2} - \theta' \frac{\partial}{\partial \theta'}\left[\left(\theta'^2 + \text{sen}^2\theta\right)^{1/2}\right] = cte = a$$

$$\left(\theta'^2 + \text{sen}^2\theta\right)^{1/2} - \theta' \frac{1}{2}\left(\theta'^2 + \text{sen}^2\theta\right)^{-1/2}(2\theta') = a$$

$$\cancel{\theta'^2} + \text{sen}^2\theta - \cancel{\theta'^2} = a\left(\theta'^2 + \text{sen}^2\theta\right)^{1/2}$$

$$\text{sen}^4\theta = a^2\theta'^2 + a^2 \text{sen}^2\theta$$

$$\theta' = \left(\frac{\operatorname{sen}^4\theta - a^2 \operatorname{sen}^2\theta}{a^2} \right)^{1/2} = \frac{d\theta}{d\phi}$$

$$d\phi = \frac{a}{\operatorname{sen}^2\theta \left(1 - \frac{a^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)^{1/2}} = \frac{a \csc^2\theta \, d\theta}{(1 - a^2 \csc^2\theta)^{1/2}}$$

$$\phi = \int \frac{a \csc^2\theta \, d\theta}{(1 - a^2\csc^2\theta)^{1/2}}$$

Lembrando que $\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \Rightarrow 1 + \operatorname{ctg}^2\theta = \csc^2\theta$

$$\phi = \int \frac{a \csc^2\theta \, d\theta}{\sqrt{(1-a^2) - a^2 \operatorname{ctg}^2\theta}} = \int \frac{a \csc^2\theta \, d\theta}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \operatorname{ctg}^2\theta}{(1-a^2)}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$u = \frac{a \operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{1-a^2}} \Rightarrow du = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \csc^2\theta \, d\theta$$

$$\therefore \phi = \int \frac{du}{(1-u^2)^{1/2}} \Rightarrow \begin{array}{l} u = \operatorname{sen}\alpha \\ du = \cos\alpha \, d\alpha \end{array}$$

$$\therefore \phi = \int \frac{\cancel{\cos\alpha} \, d\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} = \alpha + cte$$

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1}[u] + cte \Rightarrow \boxed{\phi = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{a \operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{1-a^2}}\right] + cte}$$

O Livro escreve esta equação em termos de senos e cossenos de θ e ϕ

→ a constante na página anterior!

$ctg\,\theta = \beta \sin(\phi - \cancel{\gamma})$

$$\underbrace{(\beta \cos\gamma)}_{A}\, \underbrace{r \sin\theta \sin\phi}_{y} - \underbrace{(\beta \sin\gamma)}_{B}\, \underbrace{r \sin\theta \cos\phi}_{x} =$$

$$= \underbrace{r \cos\theta}_{z}$$

$\boxed{Ay - Bx = z}$ Plano que passa pelo centro da esfera e pelos pontos ① e ②. A curva de menor caminho dado pela interseção do plano e a sup. da esfera é a geodésica procurada!

FUNÇÃO de VÁRIAS VARIÁVEIS: $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$

$$f = f\{y_1, y_1', y_2, y_2', \ldots, y_n, y_n'; x\}$$

$$f = f\{y_i(x), y_i'(x); x\} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Fazemos a mesma coisa que o caso de uma variável dependente, só que agora definimos p/ n funções:

$$y_i(\alpha, x) = y_i(x) + \alpha\, \eta_i(x)$$

→ arbitrárias

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right)\right] \eta_i(x)\, dx = 0$$

Além da condição trivial, a única forma de $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ é p/

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'_i}\right) = 0} \quad p/\ i = 1, 2, \cdots, n$$

Podemos aplicar o mesmo raciocínio p/ a segunda forma

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left[f - y'_i \frac{\partial f}{\partial y'_i}\right] = 0}$$

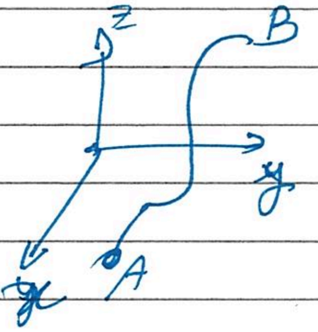
p/ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\ \ \right] = 0 \Rightarrow \boxed{f - y'_i \frac{\partial f}{\partial y'_i} = cte_i}$

Exemplo 11 Distância entre 2 pontos no espaço:

$A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ que leva ao menor tempo de percurso sob velocidade constante. A resposta óbvia é a reta!

$$dS = \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)^{1/2}$$

$$S = \int_{\Gamma} dS = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 + y'^2 + z'^2\right)^{1/2} dx$$



onde $y' = \frac{dy}{dx}$ e $z' = \frac{dz}{dx}$ (Escolhemos x como sendo a variável independente)

$$f = (1 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$$

Pelos eq. de Euler:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \therefore \dfrac{\partial f}{\partial y'} = C_1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z'}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \therefore \dfrac{\partial f}{\partial z'} = C_2 \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2} y'}{(1 + y'^2 + z'^2)^{1/2}} \quad e \quad C_2 = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2} z'}{(1 + y'^2 + z'^2)^{1/2}}$$

$$C_1^2 (1 + y'^2 + z'^2) = y'^2 \Rightarrow C_1^2 + C_1^2 y'^2 + C_1^2 z'^2 = y'^2$$

$$\boxed{(1 - C_1^2) y'^2 = C_1^2 (1 + z'^2)}$$

O mesmo p/ a eq. z' e C_2

$$\left.\begin{aligned} (1 - C_1^2) y'^2 &= C_1^2 (1 + z'^2) \\ (1 - C_2^2) z'^2 &= C_2^2 (1 + y'^2) \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{cases} y'^2 = \alpha (1 + z'^2) \\ z' = \beta (1 + y'^2) \end{cases}$$

onde $\alpha = \dfrac{C_1^2}{1 - C_1^2}$ e $\beta = \dfrac{C_2^2}{1 - C_2^2}$

$$\begin{cases} [y'^2 - \alpha z'^2 = \alpha] * (\beta) \text{ multiplicando por } \beta \\ -\beta y'^2 + z'^2 = \beta \end{cases}$$

$$(1-\alpha\beta)\,z'^2 = \beta + \alpha\beta \Rightarrow z' = \left(\frac{\beta+\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right)^{1/2} = A = cte$$

$$\frac{dz}{dx} = A \Rightarrow \boxed{z = Ax + c}$$

O mesmo pode ser feito para y'

$$y'^2 - \alpha A^2 = \alpha \Rightarrow y' = \underbrace{\alpha(1+A^2)}_{B}$$

$$\boxed{y = Bx + D}$$

Podemos ainda combinar : $\dfrac{y-D}{B} = x$

$$z = A\left(\frac{y-D}{B}\right) + c \Rightarrow \boxed{z = ay + b}$$

Eq. de retas Em qualquer projeção x, y, z $\therefore$

Mostramos que a menor Distancia entre A e B é uma reta!

Condições de Vínculo

Quando temos condições de vínculo, é possível reduzir o número de variáveis dependentes do problema. No caso da geodésica na superfície da esfera, fizemos isto diretamente impondo que $dr = 0$ ($R = cte$)

No caso geral, podemos usar o método de multiplicadores de Lagrange. Vamos considerar o exemplo de duas variáveis dependentes: y e z.

$$f = f\{y_i, y_i'; x\} = f\{y, y'; z, z'; x\}$$

Eq 1
$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \Bigg[\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right)}_{A} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}_{\eta_1(x)} + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\right)}_{B} \underbrace{\frac{\partial z}{\partial \alpha}}_{\eta_2(x)} \Bigg] d\alpha$$

Vamos considerar que exista uma equação de vínculo da forma:

$\longrightarrow$ por exemplo!

$$g\{y_i; x\} = g\{y, z; x\} = 0$$

Eq 2
$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{d\alpha} + \frac{\partial g}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{d\alpha}}_{=0} \right) d\alpha =$$

x é independente

> exemplo: No caso da superfície da esfera:
>
> $$g = \sum_i x_i^2 - R^2 = 0$$
>
> $$g = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Lembrando que $\frac{dy}{d\alpha} = \eta_1(x)$

$$\frac{dz}{d\alpha} = \eta_2(x)$$

Da equação (2):

$$\eta_2(x) = -\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) \Big/ \left(\partial g/\partial z\right) \cdot \eta_1(x) \Rightarrow$$ $\eta_2(x)$ e $\eta_1(x)$ são dependentes!

Logo: Na Eq. 1:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] - \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\right]\left(\frac{\partial g/\partial y}{(\partial g/\partial z)}\right)^{*} \right\} \eta_1(x)\, dx = 0$$

O Termo entre chave deve ser nulo. já que $\eta_1(x)$ é uma função arbitrária e e deve se anular em x_2 e x_1 apenas.

∴

$$\underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1}}_{\text{função de } y,\, y' \text{ e } x} = \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\right]\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1}}_{\text{função de } z,\, z' \text{ e } x}$$

A única possibilidade será que esta função seja igual a uma função de x; exemplo $-\lambda(x)$.

$$\left[\quad\right]\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1} = -\lambda(x) \quad \text{e} \quad \left[\quad\right]\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1} = -\lambda(x)$$

∴

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \lambda(x)\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) + \lambda(x)\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right) = 0 \\ &g(y, z; x) = 0. \end{aligned}}$$

///

"Variáveis"

3 equações (em princípio independentes) p/ 3 ~~funções~~ y, z e λ. Em geral obtemos y e z sem necessitar determinar λ.

No caso geral n variáveis temos.

$g_i(y_j; x) \rightarrow$ $j = 1 \rightarrow n$, $i = 1 \rightarrow m$. Cada equação de vínculo permitirá relacionar um $\eta_i(x)$ com outras $n-1$ $\eta_i(x)$:

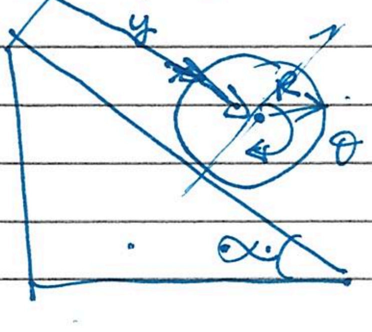
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x) \frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0}$$

Sendo portanto, n variáveis e m λ_j. Desta forma podemos escrever $n+m$ funções a serem determinadas. Como temos $n+m$ equações, o problema é solúvel, em princípio.

Caso de apenas 1 multiplicador de Lagrange relacionado.

"Isoperimetric Problem"

Exemplo 1. Disco rolando em um plano inclinado.



$y = R\theta$ distância percorrida sobre o plano.

$g(y, \theta) = y - R\theta = 0$ vínculo que indica que o Disco está no plano inclinado $y(x)$

Note que: $\frac{\partial g}{\partial y} = 1$; $\frac{\partial g}{\partial \sigma} = -R$ são as quantidades relacionadas à λ, que é única neste caso.

A extremização do funcional $f = y(x)$ tem que satisfazer.

$$J[y] = \int_a^b f\{y, y'; x\}\, dx \Rightarrow \qquad y(a) = A \text{ e } y(b) = B$$

Se o funcional de vínculo nos dá o comprimento:

$$K[y] = \int_a^b g\{y, y'; x\}\, dx = l \quad .(\text{valor fixo!})$$

Mas que depende implicitamente da função $y(x)$ obtida

É possível mostrar que podemos encontrar o extremo de

$f^* = f + \lambda g$

$$J^* = \int_a^b (f + \lambda g)\, dx$$

Que nos dará a equação diferencial

$$\frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f^*}{\partial y'} = 0$$ ou de forma equivalente

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'}\right) = 0}$$

Problema de Dido

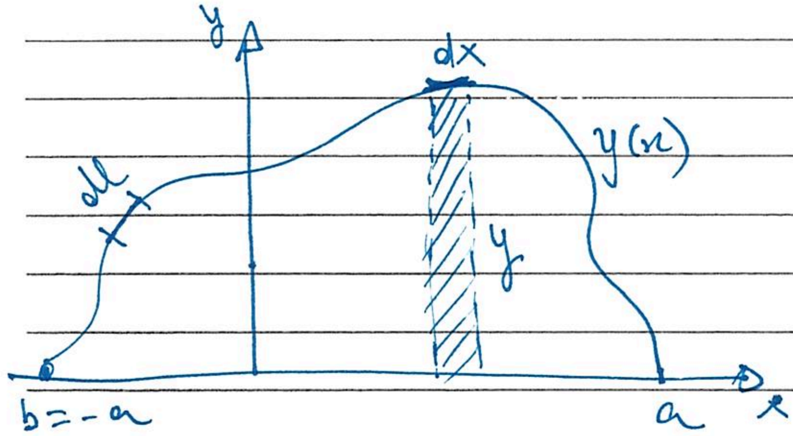
A demonstração rigorosa da equação acima pode ser encontrada em:

* I.M. Gelfand and S.V. Fomin, "Calculus of Variations"
  ↳ IMECC pg. 43

ou

* Robert Weinstock, "Calculus of Variations with applications to Physics and Engineering" pg. 48 (IFGW).

Versão do Problema da "Rainha Dido de Cartago"



$y(x)$ cujo comprimento é l é ligado em $(-a, 0)$ e $(a, 0)$

Maximizar a área.

$$A = \int_{(-a,0)}^{(a,0)} dA \qquad dA = y\,dx$$

$$A = \int_{-a}^{a} y\,dx$$

$\longrightarrow$ funcional $f(y) = y$

O vínculo é o comprimento:

$$L = \int dl = l \quad \text{onde} \quad dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$L = \int \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{\text{funcional } g(y,y';x)}\,dx = l$$

fazendo $f^* = f + \lambda g$ temos: $f^* = y + \lambda\sqrt{1+y'^2}$

Aplicando na equação da pág. 191

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \; ; \; \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \; ; \; \frac{\partial g}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f^*}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow 1 + \lambda\left[0 - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\right] = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = \frac{1}{\lambda} \quad \therefore \quad \frac{\lambda y'}{(1+y'^2)^{1/2}} = x - c_1$$

Note que escolhemos $-c$ como constante de integração por conveniência.

$$\lambda^2 y'^2 = (x-c_1)^2(1+y'^2)$$

$$\lambda^2 y'^2 = (x-c_1)^2 + y'^2(x-c_1)^2$$

$$y'^2\left[\lambda^2 - (x-c_1)^2\right] = (x-c_1)^2$$

$$y' = \pm\frac{(x-c_1)}{\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}} = \frac{dy}{dx}$$

$$y = \int dy = \pm \int \frac{(x-c_1)\,dx}{\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}}$$

fazendo $u = \lambda^2 - (x-c_1)^2 \rightarrow du = -2\,(x-c_1)\,dx$

$$\therefore \int \frac{(x-c_1)\,dx}{\sqrt{\ }} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\frac{\sqrt{u}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{u}$$

$$\therefore y = \mp\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2} + c_2$$

$$(y-c_2)^2 = \lambda^2-(x-c_1)^2 \therefore$$

$$\boxed{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2}$$

Equação de um círculo centrado em (c_1, c_2) e raio λ.

Note que podemos determinar c_2, c_1 e λ pois sabemos que $\boxed{\pi R = l}$ pelo vínculo. Também sabemos que os pontos do pungo que extremizam são $(-a,0)$ e $(a,0)$

$$c_2^2 + (-a-c_1)^2 = \lambda^2$$

$$(-1)\times \quad c_2^2 + (a-c_1)^2 = \lambda^2$$

$$(-a-c_1)^2-(a-c_1)^2 = 0 \Rightarrow (a+c_1)^2 = (a-c_1)^2$$

$\therefore \boxed{c_1 = 0}$ e da mesma eq. $\boxed{c_2 = 0}$

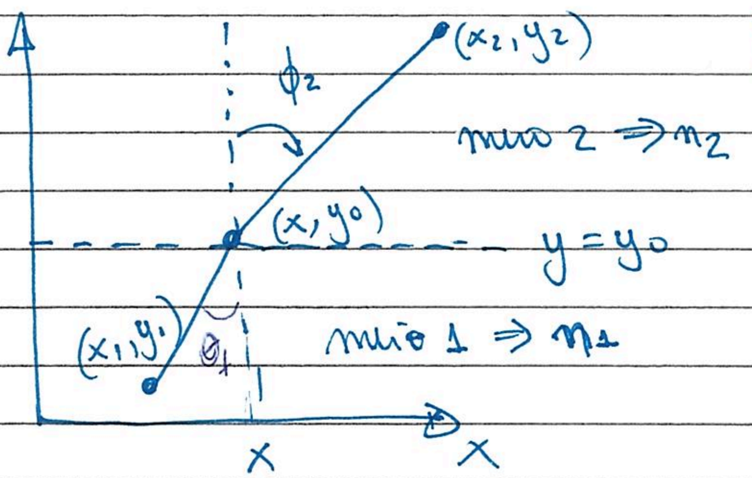
$\therefore \boxed{\lambda = a}$ A solução será o semi círculo de raio $R = a = \frac{l}{\pi}$ centrado na origem.

TAMOIO®

Aplicações e Alguns Exemplos

Resolvemos o problema da "brachistochrone" na pg 175. Na verdade, o primeiro a resolver este problema foi Johann Bernoulli aplicando o princípio de ótica geométrica ou o Princípio de Fermat (Mínimo tempo) ou Caminho percorrido no menor tempo entre dois pontos.

Consideremos a Lei de refração (Lei de Snell).



Sabemos que a curva de menor caminho [extremiza] a função tempo de percurso em um meio homogêneo é uma reta

Pg 173

$$\therefore T = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2-x)^2 + (y_2-y_0)^2}}{v_2}$$

Lembrando que $v = \lambda f \Rightarrow n = \frac{c}{v}$

Aplicando o princípio de Fermat:

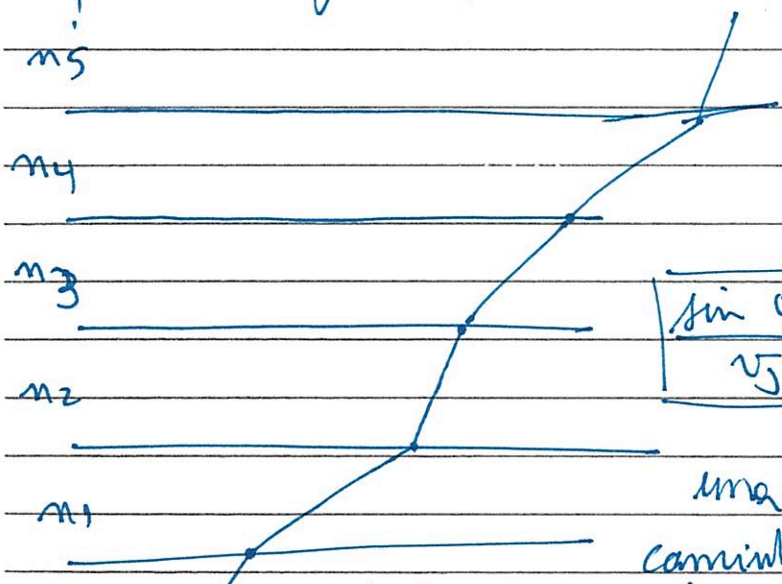
$$\frac{dT}{dx} = \frac{x - x_1}{v_1\sqrt{(x-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2}} - \frac{(x_2 - x)}{v_2\sqrt{(x_2-x)^2 + (y_2-y_0)^2}} = 0$$

$$\frac{x - x_1}{v_1\sqrt{(x-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2}} = \frac{x_2 - x}{v_2\sqrt{(x_2-x)^2 + (y_2-y_0)^2}}$$

Mas isto é:
$$\frac{\operatorname{sen}\phi_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sin}\phi_2}{v_2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\phi_1}{\frac{c}{n_1}} = \frac{\operatorname{sen}\phi_2}{\frac{c}{n_2}}$$

$\therefore$ $\boxed{n_1 \operatorname{sen}\phi_1 = n_2 \operatorname{sen}\phi_2}$ Lei de Snell.

Podemos aplicar esta análise p/ refrações sucessivas:



$$\frac{\operatorname{sen}\phi_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\phi_2}{v_2} = \cdots = \frac{\operatorname{sen}\phi_n}{v_n}$$

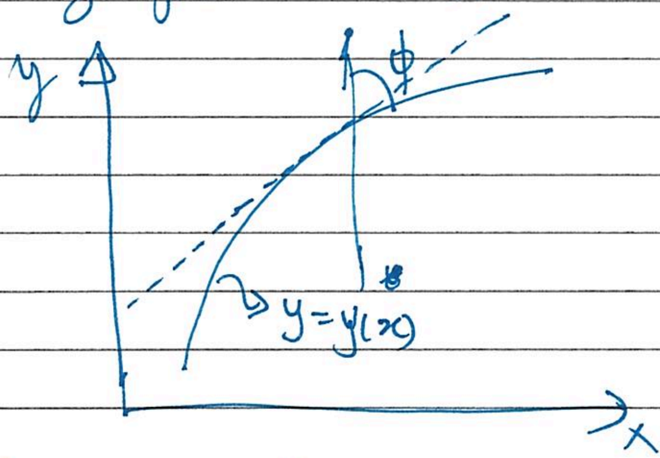
$\boxed{\frac{\operatorname{sin}\phi_j}{v_j} = K}$ onde K é

uma constante p/ um dado caminho da luz. Podemos obter K se conhecermos qualquer um dos segmentos de reta (caminho) em um dos meios.

Considerando agora o problema p/ um meio não homogêneo onde o índice de refração varia linearmente com uma direção; por exemplo:

$v = v(y)$. Desta forma temos que:

$\frac{\operatorname{sin}\phi}{v} = K$ onde ϕ e v variam continuamente como função de y. Queremos encontrar o caminho que a luz percorre neste meio



Quem é y(x)? Podemos aplicar o princípio do cálculo de variações em coord. cartesianas:

$$T = \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\underbrace{v(x,y)}_{f}}\, dx$$

Se $y = y(x)$ e $v(y)$ temos:

$$f = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)}$$

$\therefore$ Se f não dep. explicitamente de x, mas sim de y. Podemos usar a segunda forma da Equação de Euler.

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{0} - \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = C_1$$

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)} - y'\left[\frac{1}{2}\frac{2y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,\frac{1}{v(y)}\right] = C_1$$

$$\frac{1-\cancel{y'^2}-\cancel{y'^2}}{v\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \therefore \frac{1}{v^2(1+y'^2)} = C_1^2$$

$$v(y) = \frac{c}{n(y)} \therefore \frac{n^2(y)}{c^2(1+y'^2)} = C_1^2 \Rightarrow n^2 = D^2(1+y'^2)$$

$$\frac{n^2}{D^2} - 1 = y'^2 \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{n^2(y) - D^2}{D^2}}}$$ onde D é const.

∴ resolver a eq. diferencial dependendo de $n(y)$

por exemplo $n(y) \propto \sqrt{y}$

Exemplo de uma lente ótica esférica

Em uma lente de distância f, a distância p ao objeto e a distância q da imagem são relacionadas por $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$. Para um valor fixo de f, use a Eq. de Euler e multiplicadores de Lagrange para minimizar a distância $p+q$ entre o objeto e a imagem, considerando o objeto e a imagem reais (p e q positivos).

a) Identifique o funcional e a condição de vínculo.

O funcional é a distância. $D = p + q$

O vínculo será: $g = f - \dfrac{pq}{p+q}$

b) Escreve as equações de Euler.

$$\frac{\partial D}{\partial p} - \frac{d}{dx}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial D}{\partial p'}}\right) + \lambda \frac{\partial g}{\partial p} = 0 \qquad 1 + \lambda\left[\frac{-q}{p+q} + \frac{pq}{(p+q)^2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial q} - \frac{d}{dx}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial D}{\partial q'}}\right) + \lambda \frac{\partial g}{\partial q} = 0 \qquad 1 + \lambda\left[\frac{-p}{p+q} + \frac{pq}{(p+q)^2}\right] = 0$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 1 + \lambda\left[\dfrac{-q(p+q) + pq}{(p+q)^2}\right] = 0 & \quad 1 - \dfrac{\lambda q^2}{(p+q)^2} = 0 \\ 1 + \lambda\left[\dfrac{-p(p+q) + pq}{(p+q)^2}\right] = 0 & \quad 1 - \dfrac{\lambda p^2}{(p+q)^2} = 0 \end{array}\right.$$

$$(p+q)^2 - \lambda q^2 = 0 \quad \otimes\ p^2$$

$$(p+q)^2 - \lambda p^2 = 0 \quad \otimes\ -q^2$$

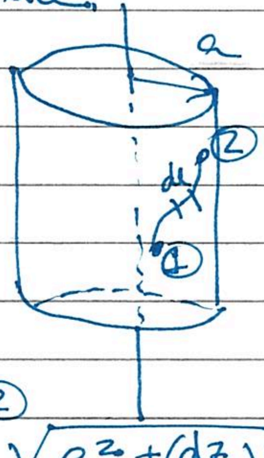
$$(p+q)^2 p^2 - (p+q)^2 q^2 = 0$$

$$(p+q)^2 \cdot (p^2 - q^2) = 0 \quad \text{p/ } p \text{ e } q > 0$$

$$\therefore\ p^2 = q^2 \text{ ou } \boxed{p = q}$$

Exemplo de Geodésica

Mostre que a geodésica sobre a superfície de um cilindro reto é o segmento de uma hélice.



$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$x = a\cos\theta \qquad dx = -a\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta$

$y = a\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad dy = a\cos\theta\, d\theta$

$z = z \qquad dz = dz$

$$d\ell = \sqrt{a^2 d\theta^2 + dz^2} \quad \therefore \quad L = \int_{1}^{2} \sqrt{a^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underbrace{\sqrt{a^2 + z'^2}}_{f(z')}\, d\theta \qquad \text{onde } z' = \frac{dz}{d\theta}$$

Aplicando a Eq. de Euler na primeira forma:

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial f}{\partial z}}}_{0} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = 0 \;\therefore$$

$$\frac{\partial f}{\partial z'} = C = cte \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{z'}{\sqrt{a^2 + z'^2}} = C$$

$$z'^2 = c^2(a^2 + z'^2) \Rightarrow (1 - c^2)\, z'^2 = c^2 a^2$$

$$z' = \sqrt{\frac{c^2 a^2}{(1 - c^2)}} = cte = \alpha \quad \therefore \quad \frac{dz}{d\theta} = \alpha = cte$$

$$\boxed{z = \alpha\theta + b}$$

z cresce como função de θ à uma taxa constante e esta é uma reta! O