

2.3 Aplicação: modelo de Ising em uma dimensão

Vamos considerar um exemplo simples, que tem solução exata, para entendermos melhor as idéias discutidas acima. Por falta de tempo, não vamos detalhar muito o resultado. Para uma versão pedagógica, sugerimos a ref. 6. Aqui, vamos seguir resumidamente os passos do CL, na ausência de um campo externo.

Solução exata O hamiltoniano de Ising em uma dimensão e na ausência de campo externo pode ser escrito de forma geral

$$\begin{aligned}
 -\bar{\mathcal{H}} &= -\frac{\mathcal{H}}{T} = K \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} + L \sum_i \sigma_i + \sum_i C \\
 &= K \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{1}{2} L \sum_i (\sigma_i + \sigma_{i+1}) + \sum_i C \\
 &= \sum_i \bar{K}(\sigma_i, \sigma_{i+1})
 \end{aligned} \tag{136}$$

onde $K = J/T$ e $L = h/T$, sendo que J é a integral de troca e h é o campo magnético externo. C é uma constante que define o zero de energia.

Para calcularmos a função de partição utilizamos matrizes de transferência. Vemos que podemos escrever a expoentencia de $\bar{K}(\sigma, \sigma')$ na forma

$$e^{\bar{K}(\sigma, \sigma')} = e^C \begin{bmatrix} e^{K+L} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K+L} \end{bmatrix} \equiv \bar{M}(K, L, C) \tag{137}$$

Quanto $h = 0$ e $C = 0$, temos

$$\bar{M}(K, 0, 0) = \cosh K (1 + \sigma \sigma' \tanh K) \tag{138}$$

Para calcular a função de partição vamos utilizar condições de contorno periódicas. Com isso, podemos escrever

$$Z_N = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_N} e^{-\tilde{H}} = \text{Tr} \bar{M}^N = e^{NC} (\lambda_+^N + \lambda_-^N) \quad (139)$$

onde λ_{\pm} são autovalores de $\bar{M}(K, L, 0)$,

$$\lambda_{\pm} = e^K \cosh L \pm (e^{2K} \sinh^2 L + e^{-2K})^{1/2} \quad (140)$$

Na ausência de campo, $h = 0$, o autovalor maior é $\lambda_+ = 2 \cosh K$. No limite de N grande, λ_-^N pode ser desprezado e a energia livre por spin é

$$\begin{aligned} \frac{f}{T} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} [-Z_N] \\ &= -C - \ln[e^K \cosh L + (e^{2K} \sinh^2 L + e^{-2K})^{1/2}] \end{aligned} \quad (141)$$

e, para $T(K \rightarrow \infty)$ pequeno e $h(L \rightarrow 0, Le^{2K} \ll 1)$ pequeno, temos

$$f - f_0 \rightarrow -Te^{-2K} - \frac{1}{2}e^{2K} \left(\frac{h^2}{T} \right) \quad (142)$$

onde

$$f_0 = -J - TC \quad (143)$$

A energia por spin do estado fundamental é J quando $C = 0$ e temos um gap no espectro de excitação com uma dependência exponencial com a temperatura no estado fundamental. A susceptibilidade a baixas temperaturas é

$$\chi = -\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} = \frac{1}{T} e^{2K} \quad (144)$$

Temos a divergência de χ para $T \rightarrow 0$, o que indica que há um ponto crítico em $T = 0$ no modelo de Ising em uma dimensão. Esse resultado era esperado qualitativamente uma vez que

em uma dimensão não deveríamos esperar uma transição para fase ordenada para temperaturas não nulas. A fase a $T = 0$ é com os spins totalmente ordenados enquanto que a $T \neq 0$, os spins aparecem desordenados.

Renormalização Vamos proceder agora com o processo de renormalização de Kadanoff. Para isso, vamos reescrever a rede em blocos de $b - 1$ spins, deixando um spin em cada sítio como na figura . A função de partição da nova rede é igual a da rede original e pode ser escrita na forma

$$Z_N(K, L, C) = \text{Tr} \bar{M}^N = \text{Tr} [\bar{M}^b]^{N'} = Z_{N'}(K', L', C') \quad (145)$$

onde $N' = N/b$ é o número de sítios da nova rede. Os potenciais da rede decimada podem ser determinados por

$$\bar{M}(K', L', C') = \bar{M}^b(K, L, C) \quad (146)$$

Quando $L = 0$, temos

$$\begin{aligned} \tanh K' &= (\tanh K)^b \\ \Rightarrow K' &= \tanh^{-1}[(\tanh K)^b] \end{aligned} \quad (147)$$

Essa equação é a *relação de recursão do grupo de renormalização*. Ela pode ser iterada um certo número de vezes e, no infinito, K chega a um *ponto fixo* K^* , tal que $K' = K = K^*$. Nesse caso temos apenas dois pontos fixos:

$$\begin{aligned} \tanh K &= 0 \quad (K = \infty) \\ \tanh K &= 1 \quad (K = 0) \end{aligned} \quad (148)$$

$\tanh K$ diminui a cada iteração aproximando-se do ponto fixo $\tanh K = 0$ na medida que o número de interações tendem ao infinito. Se $K = \infty$, $\tanh K$ permanece com valor unitário qualquer número de iterações. Como todos os valores de K outros que não seja $K = \infty$ tendem a $K = 0$, dizemos que o ponto fixo $\tanh K = 0 (T = \infty)$ é *estável*. O ponto fixo em $K = \infty$ é *instável*, uma vez que os pontos de atração para esse valor é apenas o próprio ponto $K = \infty$. A figura resume essa descrição.

O ponto fixo estável descreve o comportamento para todas as temperaturas finitas. Ele está associado a fase paramagnética. O ponto instável descreve a transição de fase em $T = 0$.

O comprimento de correlação é

$$\xi' = \xi/b \tag{149}$$

ou seja, o comprimento de correlação medido no parâmetro de rede da nova rede é b^{-1} vezes o comprimento de correlação medido na rede original. O comprimento de correlação diminui na medida que ele é reescalonado. Temos apenas dois pontos fixos: $\xi = 0$ e $\xi = \infty$. O segundo caso corresponde ao ponto crítico enquanto que o primeiro corresponde a temperaturas altas não críticas.

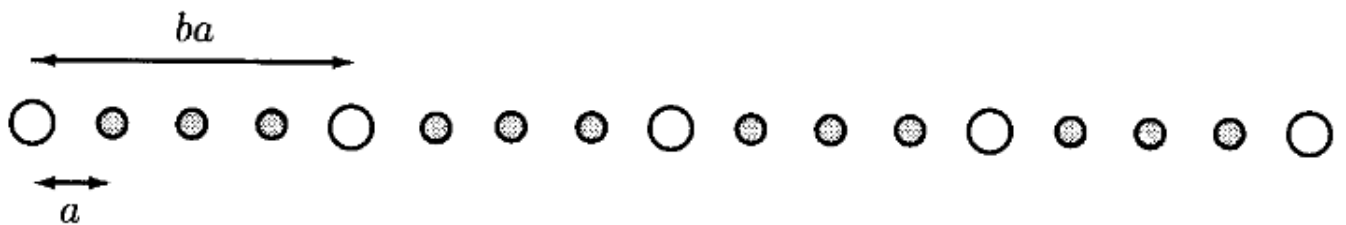


Figure 6: Esquema de decimação de uma cadeia de Ising unidimensional. Extraído de CL.

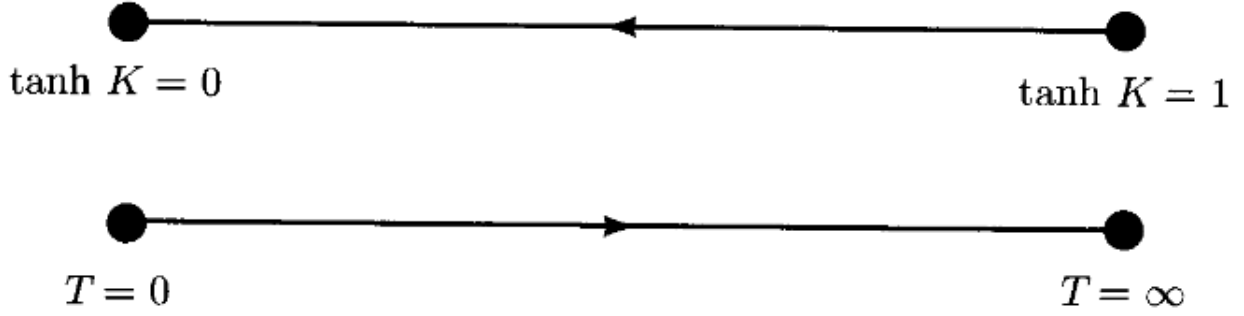


Figure 7: Fluxo do grupo de renormalização para $\tanh K$ e T , mostrando os pontos fixos estável em $\tanh K = 0$ ($T = \infty$) e instável em $\tanh K = 1$ ($T = 0$). Extraído de CL.

No caso em que L e C não são nulos, podemos encontrar as relações de recorrência a partir da equação 146. Para $b = 2$ temos

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{x(1+y)^2}{(x+y)(1+xy)} \\
 y' &= \frac{y(x+y)}{(1+xy)} \\
 w' &= \frac{w^2 xy}{(1+y)^2(x+y)(1+xy)}
 \end{aligned} \tag{150}$$

onde

$$\begin{aligned}
 x &= e^{-4K} \\
 y &= e^{-2L} \\
 w &= e^{-4C}
 \end{aligned} \tag{151}$$

As equações para x e y não dependem de w e têm três pontos fixos:

$$\begin{aligned}
(1) \quad x^* &= y^* = 0 \\
(2) \quad x^* &= 1, \quad y^* \text{ arbitrário} \\
(3) \quad x^* &= 0, \quad y^* = 1
\end{aligned} \tag{152}$$

O primeiro ponto fixo corresponde a uma configuração onde todos os spins estão alinhados para todas as temperaturas e corresponde a um campo externo infinito. O segundo ponto fixo descreve a fase paramagnética a altas temperaturas. Finalmente, o terceiro ponto fixo descreve o ponto crítico a $T = 0$. Vamos observar esse caso com mais cuidado, que é o mais interessante. Linearizando as equações de recorrência próximo ao ponto fixo temos

$$\begin{aligned}
\delta y' &= (-2L') = 2\delta y = 2(-2L) \\
\delta x' &= 4\delta x
\end{aligned} \tag{153}$$

onde $\delta x = x - x^*$ e $\delta y = y - y^*$.

A energia livre se escreve na forma

$$\frac{f(K, L, C)}{k_B T} = -\frac{1}{N} \ln Z_N(K, L, C) = -\frac{1}{bN'} \ln Z'_{N'}(K', L', C') \tag{154}$$

A única dependência da função de partição em C é por meio do fator e^{NC} . Podemos escrever então,

$$f(K, L, C) = C + f_{sing}(K, L) \tag{155}$$

Retirando a parte não-singular, C , temos

$$f_{sing}(\delta x, \delta y) = b^{-1} f_{sing}(b^2 \delta x, b \delta y) \tag{156}$$

para $b = 2$. Com $\delta y = -2L$ e $\delta x = e^{-4K}$, temos

$$f_{sing}(e^{-K}, L) = e^{-2K} f_{sing}(Le^{2K}) \quad (157)$$

que é o resultado que se obtém da solução exata (ver CL).

A figura 8 mostra o fluxo no espaço de parâmetros para três valores de h .

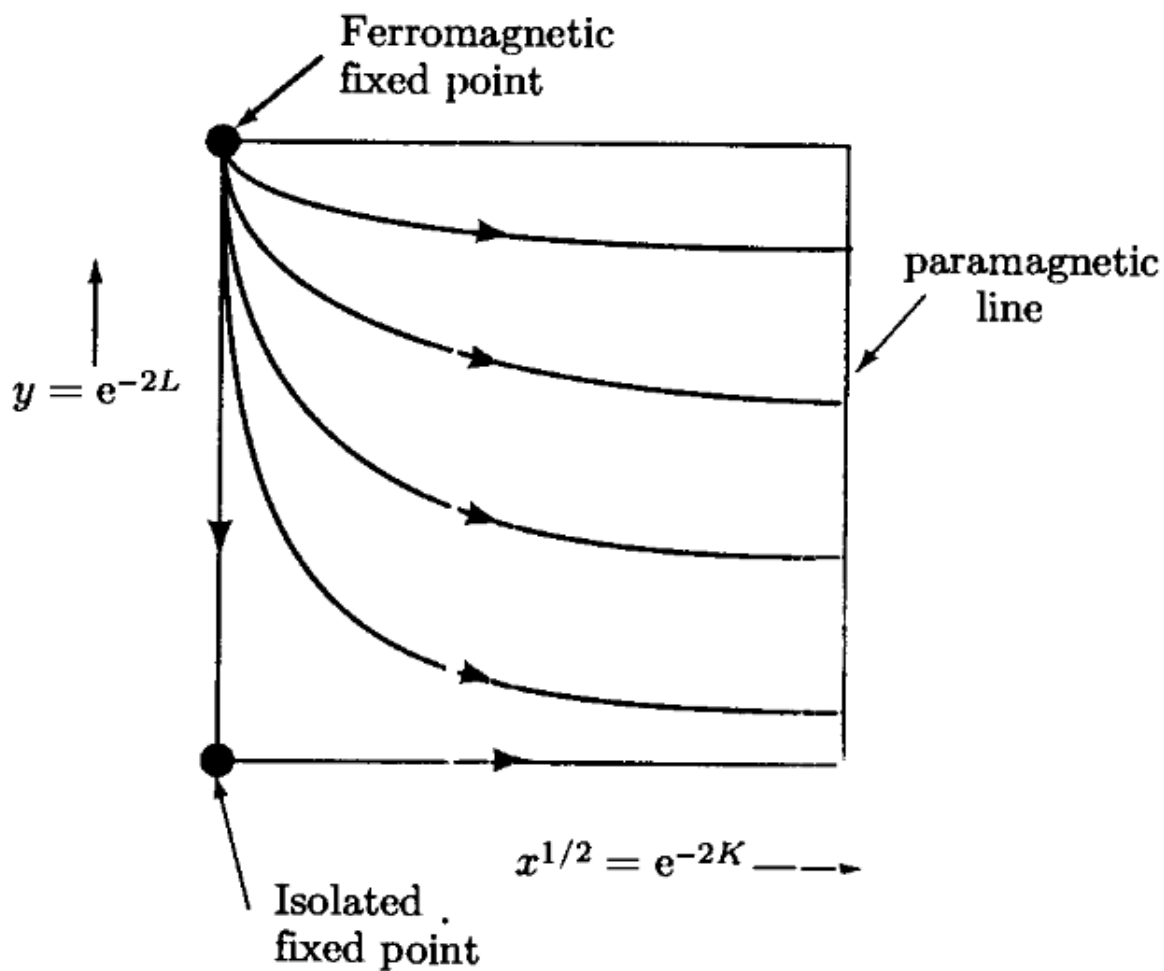


Figure 8: Fluxo de grupo de renormalização na presença de campo externo mostrando três pontos fixos. Extraído de CL (ref. original D.R. Nelson e M.E. fisher, *Ann. Phys.* **91**, 226 (1975)).

2.4 Modelo de Ising em duas dimensões

Em duas dimensões as transformadas das constantes de acoplamento tornam-se cada vez mais complexas. Em particular, partindo do hamiltoniano com interação entre os primeiro vizinhos a primeira transformação leva a uma interação entre segundos vizinhos, além da dos primeiros vizinhos, e uma interação entre quatro spins (ver ref. 6). Essa última cria problemas cada vez mais complexos. Sucessivas interações tornam o hamiltoniano impraticável. Aproximações são necessárias. O CL discute uma solução que introduz o método de Migdal-Kadanoff. O Morandi et al. (ref. 4) discute uma solução utilizando expansão em cumulantes.

2.5 Renormalização no espaço de momentos

Vamos trabalhar no espaço- \vec{k} . Para isso, vamos relembrar alguns resultados úteis para a transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}
 \int d^d r |\nabla \phi(\vec{r})|^2 &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} k^2 \phi^*(\vec{k}) \phi(\vec{k}) \\
 \int d^d r \phi(\vec{r}) h(\vec{r}) &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \phi(\vec{k}) h^*(\vec{k}) \\
 \int d^d r |\phi(\vec{r})|^2 &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \phi^*(\vec{k}) \phi(\vec{k}) \\
 \int d^d r |\phi(\vec{r})|^4 &= \frac{1}{V^3} \sum_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_4} \delta_{\vec{K}}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \phi^*(\vec{k}_1) \phi^*(\vec{k}_2) \phi(\vec{k}_3) \phi(\vec{k}_4) \quad (158)
 \end{aligned}$$

A função de partição que consideramos é

$$\mathcal{Z}(h, t) = e^{-G(h, t)/k_B T} = \int D\tilde{\phi}(\vec{r}) e^{-(\tilde{\mathcal{H}} - \int d^d r h(\vec{r}) \tilde{\phi}(\vec{r}))/k_B T}$$

onde

$$\tilde{\mathcal{H}} = \int d^d r f[\tilde{\phi}(\vec{r})] + \frac{1}{2} \int d^d r [\nabla \tilde{\phi}(\vec{r})]^2$$

onde

$$\tilde{f}[\tilde{\phi}(\vec{r})] = \frac{1}{2} |\nabla \tilde{\phi}(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2} r \tilde{\phi}(\vec{r})^2 + u \tilde{\phi}(\vec{r})^4 + \dots$$

onde escolhemos o coeficiente do termo gradiente como sendo 1/2 o que define a normalização de ϕ . Escrevendo no espaço de transformada de Fourier, temos

$$\mathcal{H}(t) - \int d^d r h(\vec{r}) \tilde{\phi}(\vec{r}) = \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}} (r+k^2) |\phi(\vec{k})|^2 + \frac{u}{V^3} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}\vec{q}'} \phi(\vec{k})\phi(\vec{k}')\phi(\vec{q})\phi(\vec{q}') \delta_{\vec{k}+\vec{k}'+\vec{q}+\vec{q}',0} - \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \phi(\vec{k}) h(-\vec{k}) + \dots$$

A somatória assume que há um cutoff para grandes vetores de onda. Para uma rede hipercúbica esse pode ser simplesmente $|k_{max}| = 2\pi/a$, onde a é o parâmetro da rede. No limite do contínuo, precisamos introduzir o cutoff artificialmente. Em geral, optamos, por simplicidade, por um cutoff esférico, $|\vec{k}| < \Lambda$. Mais uma vez, as previsões físicas devem ser independentes do cutoff, no limite deste indo para o infinito.

Assumindo uma aproximação contínua para a rede, para campo externo constante, a energia pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} G(t, h) = \mathcal{H}(t) - \int d^d r h(\vec{r}) \tilde{\phi}(\vec{r}) &= -h\phi(0) + \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (r + |\vec{k}|^2) |\phi(\vec{k})|^2 \\ &+ u \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} \phi(\vec{k} + \vec{q}) \phi(\vec{k}' - \vec{q}) \phi(-\vec{k}') \phi(-\vec{k}) + \dots \end{aligned}$$

onde a integral subentende um limite do tipo $|\vec{k}| < \Lambda$.

A função de partição é calculada agora na forma

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int D\phi(\vec{k}) D\phi(\vec{k})^* e^{-G(h,t)}$$

onde

$$\int D\phi(\vec{k})D\phi(\vec{k})^* \rightarrow \prod_{|\vec{k}|<\Lambda} d\mathcal{R}\phi(\vec{k})d\mathcal{I}\phi(\vec{k})$$

Para um parâmetro de ordem real, nos restringimos a metade do espaço- \vec{k} tendo em vista a condição $m(\vec{k})^* = m(-\vec{k})$.

O processo de renormalização consiste agora em continuar o processo de granularidade espessa para comprimentos de onda cada vez maiores, sucessivamente. Esse processo de granular o sistema a cada renormalização consiste em alterar sucessivamente o valor do cutoff para Λ/b . A figura 9 ilustra esse processo, comparando a renormalização do espaço real com a do espaço \vec{k} . Para cada renormalização, integramos os valores de k na camada definida pelos raios Λ e Λ/b e reescalamos o problema a seguir. O que temos que desenvolver agora, dentro da mesma idéia da renormalização no espaço direto, é um processo de efetuar a média sobre as flutuações do parâmetro de ordem em distâncias curtas (ou grandes vetores de onda) e reescalonar o mesmo e o momento de forma que possamos obter uma energia livre com a mesma forma funcional e o mesmo cutoff para altos valores do momento (cutoff no ultra-violeta). Devemos, aqui também, esperar que novos acoplamentos apareçam. Ou seja, temos de considerar um espaço de constantes de acoplamento bastante geral (infinito).

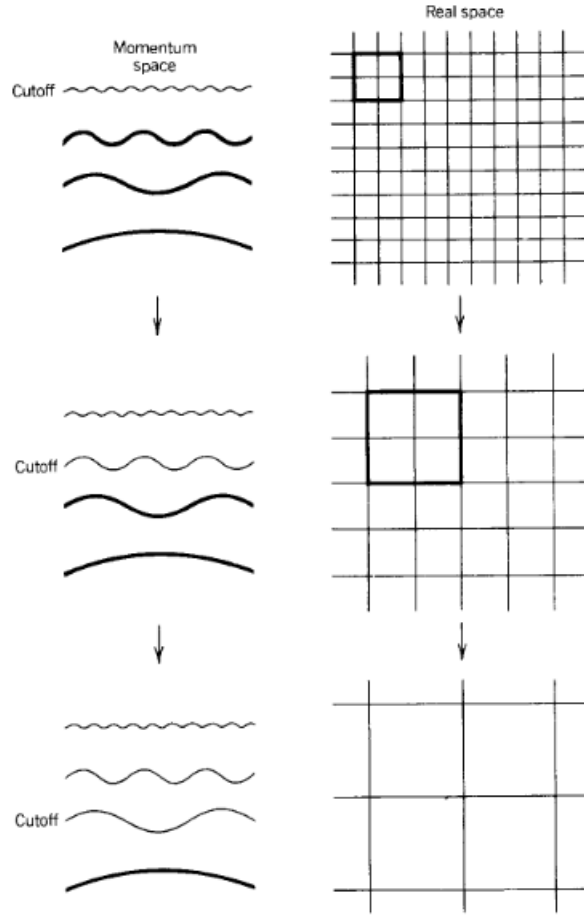


Figure 9: Comparação entre a granularidade espessa no espaço real e no espaço de momentos. Extraído de 2.

Podemos esquematizar a metodologia em três passos (por praticidade vamos incluir o termo de campo no hamiltoniano):

1. *Integração*: Definir um novo hamiltoniano \mathcal{H}' integrando \vec{k} entre os valores absolutos Λ e Λ/b ($b > 1$):

$$e^{-\mathcal{H}'[\phi(\vec{k})]} = e^{\Omega} \prod_{\Lambda/b < |\vec{k}| < \Lambda} \int d\phi(\vec{k}) d\phi * (\vec{k}) e^{-\mathcal{H}[\phi(\vec{k})]} \quad (159)$$

onde Ω [e uma constante que depende do cutoff Λ e das constantes de acoplamento. O novo hamiltoniano depende apenas de $\phi(\vec{k})$ onde $|\vec{k}| < \Lambda/b$. Com essa diferença ele tem a mesma forma do hamiltoniano original mas com novas constantes de acoplamento. A função de

partição tem a forma

$$\mathcal{Z} = e^{-G} = e^{\Omega \mathcal{N}} \prod_{|\vec{k}| < \Lambda/b} \int d\phi(\vec{k}) d\phi * (\vec{k}) e^{-\mathcal{H}'[\phi(\vec{k})]} \quad (160)$$

2. *Reescalonamento*: Devemos restaurar o cutoff para o valor Λ . Para isso aumentamos a unidade de comprimento pelo fator b mudando a variável

$$\vec{k}' = b\vec{k} \quad (161)$$

O hamiltoniano deve ser escrito agora na forma

$$\mathcal{H}'[\phi(\vec{k})] \rightarrow b^{-d} \mathcal{H}'[\phi(\vec{k}')] \quad (162)$$

3. *Normalização*: Finalmente devemos restaurar a normalização do parâmetro de ordem. Para isso fazemos o coeficiente do termo de gradiente para $1/2$. Isso é feito com uma operação do tipo

$$\phi(\vec{k}) \rightarrow \alpha(b) \phi(b\vec{k}') \quad (163)$$

Como

$$\alpha(b)\alpha(b') = \alpha(bb'), \quad b, b' > 1 \quad (164)$$

com a condição $\alpha(1) = 1$, então definindo

$$y = \left. \frac{d\alpha(b)}{db} \right|_{b=1}$$

e derivando a eq. 164, temos

$$b \frac{d\alpha(b)}{db} = y\alpha(b); \quad \alpha(1) = 1$$

o que resulta, após a integração, em

$$\alpha(b) = b^y$$

As figuras 10 e 11 ilustram esse procedimento.

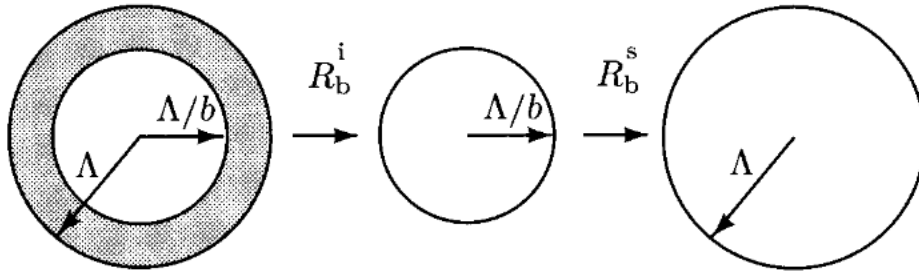


Figure 10: Efeito de diminuir os graus de liberdade na zona de Brillouin. A esfera original tem raio Λ . Todos os campos com vetor de onda \vec{k} entre Λ/b e Λ são removidos, ficando uma zona de Brillouin com raio Λ/b . Na transformação seguinte os vtores de onda são reescalados para $\vec{k} = b\vec{k}$. A nova zona de Brillouin tem raio Λ mas o número total de vetores de ona \vec{k} diminui para $N' = N/b^d$. Extraído de CL.

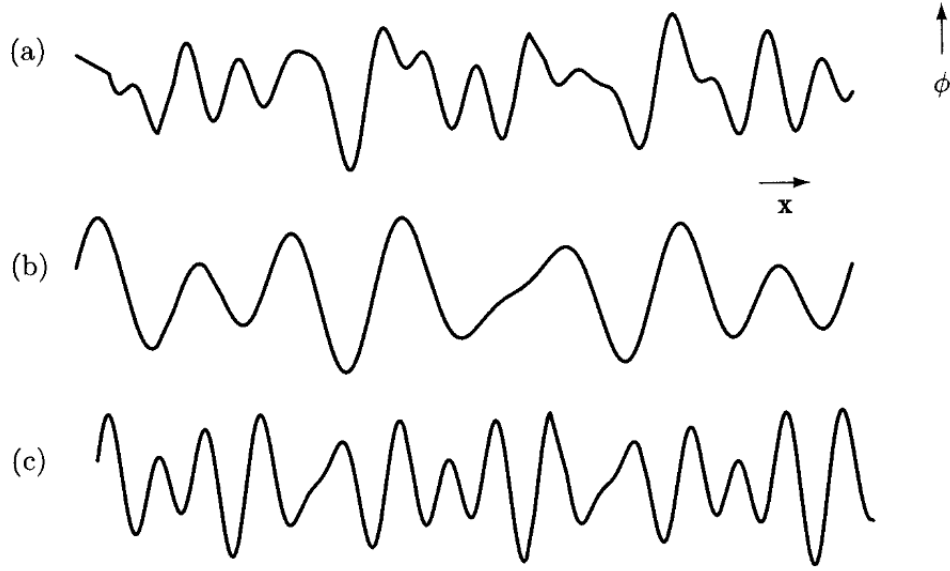


Figure 11: (a) Representação esquemática dos campos $\phi(\vec{r})$ com variação espacial em uma dimensão com o máximo de vetores de onda na transformada de Fourier com cutoff Λ . (b) Os campos $\phi(\vec{r})$ depois que os vetores de onda de maior grau de liberdade foram removidos. Os vetores de onda com maior valor são Λ/b . (c) Reescalonamento do campo $\phi'(\vec{r})$ em função da coordenada reescalada $\vec{r}' = \vec{r}/b$. O vetor de onda máximo em unidades reescaladas é novamente Λ , como mostram as oscilações de $\phi'(\vec{r}')$. Extraído de CL.

Esse procedimento estabelece novamente uma transformação \mathcal{R} que permite calcular as constantes de acoplamento:

$$\mathcal{K}' = \mathcal{R}_b(\mathcal{K}) \quad (165)$$

com

$$\mathcal{R}_1 = \text{identidade}$$

e

$$\mathcal{R}_b \mathcal{R}_{b'} = \mathcal{R}_{bb'}$$

A análise que fizemos para as transformações de blocos no espaço real permanece válida. O ponto

fixo é encontrado por meio da equação

$$\mathcal{K}^* = \mathcal{R}_b(\mathcal{K}^*) \quad (166)$$

2.6 Modelo gaussiano

Vamos aplicar o método de renormalização no espaço- \vec{k} para o modelo gaussiano. A energia livre é descrita pelo funcional

$$\mathcal{F} \{ \phi(\vec{k}), h \} = -h\phi(0) + \frac{1}{2} \int_{|\vec{k}| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [|\vec{k}|^2 + r(T)] |\phi(\vec{k})|^2 \quad (167)$$

1. A primeira etapa é calculada sem problemas uma vez que a integração envolve modos independentes. Temos então,

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \prod_{|\vec{k}| < \Lambda/b} \int d\phi(\vec{k}) d\phi(\vec{k})^* e^{-\mathcal{H}'\{\phi, h\}} \quad (168)$$

onde

$$\mathcal{H}' \{ \phi, h \} = -h\phi(0) + \frac{1}{2} \int_{|\vec{k}| < \Lambda/b} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [|\vec{k}|^2 + r(T)] |\phi(\vec{k})|^2 \quad (169)$$

A parte regular \mathcal{Z}_0 é

$$\mathcal{Z}_0 = \mathcal{N} \prod_{\Lambda > |\vec{k}| > \Lambda/b} \left\{ \pi [r(T) + |\vec{k}|^2]^{-1} \right\} \quad (170)$$

2. O segundo passo se transforma na forma

$$\mathcal{H}' \rightarrow -h\phi(0) + \frac{1}{2} b^{-d} \int_{|\vec{k}| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [b^{-2} |\vec{k}|^2 + r(T)] |\phi(\vec{k}/b)|^2 \quad (171)$$

3. O terceiro passo tem apenas uma solução,

$$y = 1 + \frac{d}{2}$$

ou seja,

$$\phi(\vec{k}') = b^{-(d+2)/2} \phi(\vec{k}) = b^{-(d+2)/2} \phi(\vec{k}'/b) \quad (172)$$

O resultado final é

$$\mathcal{H}' \{h, \phi\} = -h' \phi(0) + \frac{1}{2} \int_{|\vec{k}| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [|\vec{k}|^2 + r'(T)] |\phi(\vec{k})|^2 \quad (173)$$

onde

$$\begin{aligned} h' &= b^{1+d/2} h \\ r' &= b^2 r \end{aligned} \quad (174)$$

de onde temos

$$\begin{aligned} D_t &= 2 \\ D_h &= 1 + \frac{d}{2} \end{aligned} \quad (175)$$

e como $b > 1$, r e t são variáveis relevantes.

O comprimento de correlação pode ser obtido da condição

$$\begin{aligned}\xi r &= \text{constante} \\ \Rightarrow \xi &\sim r^{-1/2} \sim t^{-1/2}\end{aligned}\tag{176}$$

Os demais expoentes podem ser obtidos das relações de escalonamento.

O resultado tem um aprendizado importante: *podemos obter os expoentes críticos em um sistema contínuo realizando uma transformação infinitesimal uma vez que tudo que precisamos é a razão da variação das constantes de acoplamento.*

2.7 Modelo ϕ^4

References

- [1] Chaikin e Lubenski, **Condensed Matter Physics**, Oxford, 1995.
- [2] Kerson Huang, **Statistical Mechanics**, 2a. e<http://www.libgen.info/d>. John Wiley & Sons, 1987.
- [3] Edouard Brézin, **Introduction to Statistical Field Theory**, Cambridge, 2010.
- [4] G. Morandi, F. Napoli e E. Ercolessi, **Statistical Mechanics: An Intermediate Course**, 2a. ed., World Scientific, 2001.
- [5] Th. Niemeijer a J.M.J. van Leeuwen, em **Phase Transitions and Critical Phenomena**, vol. 6, pp. 425-505, C. Domb e M.S. Green, eds., Academic Press, 1976.
- [6] H.J. Maris e L.P. Kadanoff, “Teaching the renormalization group”, *Am. J. Phys.* **46**, 652 (1978).