

# F 604-Lista de Exercícios III - “Introdução aos Métodos Estatísticos”

1. Todos os exercícios do livro do Salinas (*Introdução à Física Estatística*).
2. (Prob. 1.10 - Reif) Considere a distribuição de Poisson (exercício 5 Salinas).
  - (a) Mostre que ela é normalizada, isto é,  $\sum_{n=0}^{\infty} W_n = 1$ . (sugestão: a soma pode ser estendida ao infinito em boa aproximação uma vez que  $W_n$  é pequena quando  $n \gtrsim N$ )
  - (b) Calcule  $\langle n \rangle$ .
  - (c) Calcule  $\langle (\Delta n)^2 \rangle \equiv \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$ .
3. (Prob. 1.16 - Reif) Considere um gás com  $N_0$  moléculas não interagentes dentro de um recipiente com volume  $V_0$ . Considere um subvolume qualquer  $V$  desse recipiente e considere como sendo  $N$  o número de moléculas contidas nesse subvolume. Cada molécula tem a mesma probabilidade de encontrar-se em qualquer lugar do recipiente. Ou seja, a probabilidade de uma molécula em particular encontrar-se no subvolume  $V$  é simplesmente  $V/V_0$ .
  - (a) Qual é o valor médio  $\langle N \rangle$  de moléculas localizadas em  $V$ ? (Expresse em termos de  $N_0, V_0, V$ .)
  - (b) Encontre a dispersão relativa do número de moléculas localizadas em  $V$ , isto é,  $\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle / \langle N \rangle^2$ .
  - (c) O que acontece com a resposta de (b) quando  $V \ll V_0$ ?
  - (d) Qual o valor da dispersão quando  $V \rightarrow V_0$ ? O resultado de (b) concorda com esse valor esperado?

4. (Prob. 1.27 - Reif) Considere um caminho aleatório generalizado, onde a probabilidade do  $i$  -ésimo deslocamento encontrar-se entre  $s_i$  e  $s_i + ds_i$  é dada por  $w_i(s_i)ds_i$ . A densidade de probabilidade  $w_i(s_i)$  que caracteriza cada passo pode ser diferente e depende de  $i$ . No entanto, ainda é verdade que cada passo é estatisticamente independente, i.e.,  $w_i$  para cada passo não depende dos deslocamentos realizados pela partícula em qualquer outro passo. Mostre que quando o número  $N$  de deslocamentos é grande, a probabilidade  $P(x)dx$  que o deslocamento total encontre-se entre  $x$  e  $x + dx$  aproxima-se de uma forma gaussiana, com valor médio  $\langle x \rangle = \sum \langle s_i \rangle$  e dispersão  $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \sum \langle (\Delta s_i)^2 \rangle$ . Esse resultado é uma forma generalizada do *teorema do limite central*.
5. (Ex. 6 - Brézin) Uma série de observações sobre um dado mal distribuído indica que a frequência da face seis é duas vezes superior a da face cinco. Utilize o critério de minimização de informação ausente para determinar a lei de probabilidade desse dado. (*obs.*: utilize multiplicadores de Lagrange)
6. (Ex. 7 - Brézin) Consideremos um macroestado que descreve 1 mg de água a temperatura ambiente correspondendo a um certo número de microestados quânticos igualmente prováveis. Estime o número de microestados, sabendo que a entropia da água é  $70 J - mol^{-1} - K^{-1}$ . Estime, em unidades termodinâmicas, a ordem de grandeza da quantidade de informação contida na biblioteca do IFGW. Compare com a entropia de um  $mm^3$  de gás. Compare também com a ordem de grandeza da informação genética por indivíduo (o DNA dos cromossomos de uma bactéria medem um total de  $2mm$ ; suas bases constitutivas, em número de 4, são distantes de 3,3; o material genético humano é aproximadamente 1.000 vezes maior), por unidade de massa, por cromossomo (cada base tem  $300 u$ , e o DNA tem uma dupla hélice) e para as proteínas (uma proteína é

formada de algumas sub-unidades, de massa entre 10.000 e 30.000  $u$ , constituídas de 20 aminoácidos de massa 100  $u$ ; cada aminoácido é codificado por 3 bases sucessivas). Quantas proteínas diferentes podem existir numa bactéria?

O cérebro possui aproximadamente  $10^{10}$  neurônios, realizando em média 5.000 sinapses (ligações com seus vizinhos). Si assumirmos que a memória consiste em ativar ou desativar cada ligação, qual a quantidade máxima de informação pode ser armazenada no cérebro? Qual a quantidade de informação necessária para descrever a rede neural? Compare com a informação genética. Comente sobre a validade das suposições feitas.