

F 604-Lista de Exercícios IV - “Microcanônico”

1. Todos os exercícios do livro do Salinas cap. 4 (*Introdução à Física Estatística*).
2. (Extraído do Greiner) Calcule as propriedades termodinâmicas (temperatura, pressão, potencial químico) de um sistema formado por N osciladores harmônicos clássicos com frequência ω , *distinguíveis*, no ensemble microcanônico.
3. (Extraído do Greiner) *Gas ultrarelativístico*. Calcule as propriedades termodinâmicas de um gás clássico ultrarelativístico no ensemble microcanônico. Considere um gás constituído de partículas sem massa, que se movem com velocidade da luz (fótons, por exemplo). Nesse caso, temos

$$\epsilon = (\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2} \rightarrow \epsilon = |\vec{p}| c, \text{ para } m=0$$

Um gás ultrarelativístico é um modelo usado frequentemente para partículas com massa $m \neq 0$ mas com energia por partícula $\epsilon \gg mc^2$, ou, equivalentemente, se a temperatura for muito alta, de forma que a energia de repouso mc^2 possa ser desprezada quando comparada com a energia cinética.

Sugestões:

Você terá que calcular o volume do espaço de fase dos momentos com a condição

$$\sum_{i=1}^N |\vec{p}| c \leq E$$

em um espaço de dimensão- $3N$. Para isso, considere que tomando a média sobre muitos pontos do espaço de fase, temos,

$$\langle \vec{p}^2 \rangle = 3 \langle p_x^2 \rangle = 3 \langle p_y^2 \rangle = 3 \langle p_z^2 \rangle$$

e, como não temos direção preferencial,

$$\sqrt{\langle \vec{p}^2 \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\sqrt{\langle p_x^2 \rangle} + \sqrt{\langle p_y^2 \rangle} + \sqrt{\langle p_z^2 \rangle} \right)$$

e aproximamos então,

$$\epsilon = c(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \approx \frac{c}{\sqrt{3}} (|p_x| + |p_y| + |p_z|)$$

A condição de restrição no cálculo do volume do espaço de fases dos momentos se escreve agora na forma

$$\sum_{i=1}^N |p_i| \frac{c}{\sqrt{3}} \leq E$$

O problema *se resume* a obter o volume de um *simplex* de dimensão $3N$. O resultado é (os detalhes ficam como exercício)

$$\int_{\sum_{i=1}^N |x_i| \leq 1} d^n x = \frac{2^n}{n!}$$

4. Teste (2o. teste 2s2010) formulado a partir da discussão feita na seção 3.3 (“What is temperature?”) do livro **Statistical Mechanics: En-**

tropy, Order Parameters, and Complexity, de James P. Sethna, Oxford Master Series.

Vamos aprofundar um pouco nossa discussão sobre o conceito de temperatura na física estatística. Da termodinâmica - e de nossa experiência pessoal - sabemos que o calor “flui” de um corpo quente para um corpo frio, quando em contato, até atingirem a mesma temperatura. Na física estatística, a distribuição de calor (energia) entre dois corpos (nos nossos exemplos, entre dois subsistemas que compoem um sistema isolado) é determinada pela suposição que os microestados do sistema isolado são igualmente prováveis. Como essas duas suposições são compatíveis? Para isso, vimos que se definirmos a entropia da forma

$$S = k \ln \Omega(E, V, N)$$

onde S é a entropia em equilíbrio e $\Omega(E, V, N)$ é o número total de microestados do sistema quando em equilíbrio. Vimos, com o auxílio de simulações, e para termos uma situação de equilíbrio entre dois subsistemas, a definição estatística de temperatura na forma

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V, N}$$

satisfaz os requisitos.

Consideremos um sistema isolado caracterizado pelas variáveis (E, V, N) e separado em dois subsistemas 1 e 2 que podem trocar energia mas não partículas e volume. Esses dois sistemas, quando em contato, evoluem para uma situação de equilíbrio. A definição da entropia e da temperatura (equações acima) partiu da identificação do equilíbrio com a distribuição de energia para a qual o sistema tem a maior probabilidade de existir, ou seja, o maior número de microestados. Para que essa suposição seja razoável, a probabilidade do sistema encontrar-se com essa energia deve ser uma função com

um forte pico em torno dessa energia. Assumimos que essa situação ocorre para N muito grande. Nosso objetivo aqui é demonstrar que essa condição é satisfeita.

Considere $\rho(E_1) = \Omega_1(E_1)\Omega_2(E_2)/\Omega(E)$ como sendo a probabilidade que o subsistema 1 tenha energia E_1 , onde $\Omega(E)$ é o número total de microestados. Nossa suposição diz que o sistema em equilíbrio será aquele para o qual, por exemplo, o subsistema esteja com energia \tilde{E}_1 , tal que $\rho(\tilde{E}_1)$ seja o valor máximo. A função $\rho(E_1)$ deve ter um forte pico em torno da energia mais provável, \tilde{E}_1 (lembrando que $\tilde{E}_2 = E - \tilde{E}_1$). Vamos demonstrar essa condição em duas etapas.

(1) Mostre que as flutuações de energia são gaussianas e encontre a meia-largura da gaussiana, σ_E .

(2) Faça uma análise de escala e mostre que a flutuação de energia por partícula, σ_E/N , varia com $1/\sqrt{N}$ e portanto tende a zero quando $N \rightarrow \infty$. Essa dependência é típica das flutuações na mecânica estatística (como já discutimos anteriormente).