

Lista de Exercícios V

- (baseado no problema 1, cap. 6, Ibach&Luth, 3a. ed.)
 - Calcule a densidade de estados para um gás de elétrons livres bidimensional (conhecido como poço quântico). Considere as seguintes condições de contorno para uma função de onda eletrônica: $\psi(x, y, z) = 0$ para $|x| > a$, onde a é da ordem do nanômetro.
 - Calcule a densidade de estados para um gás de elétrons livres unidimensional com as seguintes condições de contorno: $\psi(x, y, z) = 0$ para $|x| > a$ e $|y| > b$, onde a e b tem dimensões nanométricas.
 - Discuta sistemas onde essas condições podem ser realizadas.
 - Repita o problema do item (a) para uma barreira finita igual a V_0 . Assuma $a = 100 \text{ \AA}$. Para quais temperaturas podemos considerar o gás de elétrons como sendo bidimensional? Se pudermos criar um potencial de barreira de $V_0 = 100 \text{ meV}$, considere uma massa eletrônica igual a uma massa efetiva igual a $m_{ef} = 0,067 m_e$ (valor dos elétrons de condução no semiconductor *GaAs* dopado tipo-*n*) e realizarmos os experimentos a 20 mK , quais os valores da largura do poço quântico a para que o sistema possa ser considerado como sendo bidimensional? Considere uma concentração de elétrons de $10^{11} - 10^{12} \text{ e/cm}^2$ e discuta o valor do potencial químico nessas condições. O sistema está no limite clássico ou quântico? (essas são as condições experimentais para o estudo do efeito Hall quântico fracionário, por exemplo).
- (baseado no problema 2, cap.6, Ibach&Luth, 3a. ed.) Calcule na menor ordem a dependência do potencial químico com a temperatura para um gás de elétrons livres cuja concentração permanece constante. Discuta, baseado nesse resultado, as condições para o limite clássico.
Sugestão: Escreva a expressão para a concentração do elétron a temperatura finita. A integral

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{y} dx}{1 + e^{y-x}}$$

Para $x \geq 1,5$

$$F(x) \approx \frac{2}{3} x^{3/2} \frac{1 + \pi^2}{8x^2}$$

é uma boa aproximação.

- (problema 4, cap. 6, Ibach&Luth, 3a. ed.) Para qual temperatura T_0 o calor específico do gás de elétrons livres torna-se maior que o calor específico da rede? Expresse a temperatura em termos da temperatura de Debye Θ_D e a concentração de elétrons. Calcule T_0 para o cobre.

4. (problema 6, Cap. 5, Ibach&Luth, 3a. ed.) Calcule a expansão térmica para um oscilador anarmônico seguindo o mesmo procedimento do problema anterior. A variação da frequência do deslocamento u_{est} pode ser encontrada utilizando o *ansatz* $u(t) = u_{est} + u_1 \sin \omega t$.
5. (problema 1, cap. 6, Marder) (a) Mostre que o produto das funções de onda

$$\Psi(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) = \prod_{i=1}^N \psi_i(\vec{r}_i)$$

onde $\psi_i(\vec{r}_i)$ são autofunções do hamiltoniano

$$\hat{\mathcal{H}}_{el} \psi_i(\vec{r}) = \left[\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{eff}(\vec{r}) \right] \psi_i(\vec{r}) = \varepsilon_i \psi_i(\vec{r})$$

é solução do hamiltoniano

$$\hat{\mathcal{H}}_{el} \Psi(\vec{r}) = \left[\sum_{i=1}^N \frac{-\hbar^2 \nabla_i^2}{2m} + V_{eff}(\vec{r}_i) \right] \Psi(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) = E_t \Psi(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N)$$

e que a energia total do sistema é a soma das energias individuais, $E_t = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i$.

(b) Repita o problema para uma solução antisimetrizada, que satisfaz o princípio de exclusão de Pauli:

$$\Psi(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) = \frac{1}{N!} \sum_s (-1)^s \prod_{i=1}^N \psi_{s_i}(\vec{r}_i)$$

onde a soma sobre s representa uma soma sobre todas as permutações de N inteiros, $(-1)^s$ dá o sinal da permutação e s_i indica a i -ésima entrada na permutação. Verifique que a energia total é a mesma da solução anterior, não antisimetrizada.

6. (problema 3, cap. 6, Marder) Encontre a pressão para um gás de elétrons livres a $T = 0$.
7. Calcule a contribuição para o calor específico de um gás de elétrons livres bidimensionais. Verifique o limite de altas temperaturas. Discuta.