Part IX

Os limites da teoria de campo médio, universalidade, escalonamento e grupo de renormalização

A teoria de campo médio que estudamos até o momento descreve muitas das fases condensadas e mesmo consegue descrever, pelo menos qualitativamente, muitas das transições das fases, conseguindo, às vezes, até uma descrição quantitativamente correta. Essencialmente, como discutimos, a teoria de campo médio considera a média das interações, desprezando o papel das flutuações. Consideremos o modelo mais simples, o modelo de Ising. Nesse caso, se pensarmos em uma única dimensão, o spin em uma célula interage com apenas dois vizinhos, à direita e à esquerda. A interação média, nesse caso, envolve poucos (dois) spins e é pouco provável que ela consiga reproduzir a física do sistema. Mais grave, no entanto, é que, para um sistema markoviano, qualquer flutuação do sistema impede a formação de uma ordem de longo alcance. Para um sistema de Ising bidimensional, a situação melhora um pouco, com mais spins participando da interação direta. Devemos esperar, portanto, que *a teoria de campo médio funciona melhor quanto maior for a dimensionalidade do sistema.* Esse resultado já foi observado quando calculamos os expoentes críticos na teoria de Landau. Seguindo o mesmo raciocínio, devemos esperar também que quanto maior for o alcance da interação, maior é o número de sítios com o qual o spin interage, aumentando a participação desses na sua média. Portanto, *a teoria de campo médio funciona melhor para interações de maior alcance.* É de se esperar, no entanto, que próximo da transição de fase, onde as flutuações desempenham papel importante, a teoria de campo médio tenha maiores dificuldades. Na verdade, a dificuldade é ainda maior porque na transição costumamos nos depararmos com flutuações em todas as escalas de tamanho, as quais não podem ser desprezadas para uma correta descrição do

fenômeno.

Nesse capítulo vamos discutir os limites da teoria de campo médio. A seguir apresentaremos as idéias de universalidade e escalonamento. A seguir apresentaremos a teoria de grupo de renormalização. A estratégia básica da teoria de grupo de renormalização está em tratar o problema em diversas etapas, uma para cada escala de tamanho. Para cada escala, é realizado uma média das flutuações, começando pelas mais microscópicas e efetuando médias em escalas sucessivamente maiores até que a média seja realizada sobre todas as escalas de interesse do problema. Discutiremos essas idéias principalmente dentro da aproximação de Kadanoff e, havendo tempo, faremos uma incursão na teoria de Wilson. Estaremos nos limitando, como é de se esperar, a sistemas físicos com transição de fase de segunda ordem.

Esse capítulo está inteiramente baseado em partes do cap. 5 do CL (ref. 1). Referências adicionais aparecerão no texto.

1 Limites da teoria de campo médio

A teoria de campo médio é uma boa aproximação se as flutuações do parâmetro de ordem em torno de seu valor médio são pequenas. Uma medida quantitativa para isso foi introduzida por Ginzburg em 1960. Para isso calcula-se o desvo do parâmetro de ordem em relação ao seu valor médio, $\delta\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) - \langle\phi\rangle$, em um volume de coerência, determinado pelo comprimento de correlação ξ, $V_\xi \sim \xi^d$:

$$\delta\phi_{coe} \equiv \frac{1}{V_\xi}\int_{V_\xi} \mathrm{d}^\xi r \delta\phi(\vec{r}) \tag{1}$$

onde estamos considerando uma dimensão d para o sistema e $\vec{r}$ significa aqui um vetor de dimensão d. As flutuações podem ser desprezadas se na fase ordenada, $\left\langle(\delta\phi_{coe})^2\right\rangle$ é muito menor que $\langle\phi^2\rangle$, ou seja

$$\frac{1}{V_\xi^2}\int_{V_\xi} \mathrm{d}^d r \mathrm{d}^d r' \left\langle\delta\phi(\vec{r})\delta\phi(\vec{r}')\right\rangle = \frac{1}{V_\xi}\int_{V_\xi} \mathrm{d}^d r G(\vec{r},0) < \left\langle\phi^2\right\rangle \tag{2}$$

onde $G(\vec{r},\vec{r}') = G(\vec{r}-\vec{r}')$ é a função de correlação do parâmetro de ordem introduzida anteriormente,

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \langle \delta\phi(\vec{r})\delta\phi(\vec{r}')\rangle \tag{3}$$

Lembremos que

$$G(\vec{r},\vec{r}') = T\chi(\vec{r},\vec{r}') \tag{4}$$

onde $\chi(\vec{r},\vec{r}')$ é a susceptibilidade que relacona $\delta\langle\phi(\vec{r})\rangle$ com o campo externo conjugado em $\vec{r}$. A teoria de campo médio fornece sua própria regra de consistência: se a equação 2 para $G(\vec{r},0)$ e $\langle\phi\rangle$ é satisfeita, então a teoria de campo médio é internamente consistente e é uma boa aproximação. Do contrário, as flutuações desempenham um papel importante e não podem ser desprezadas.

Podemos calcular uma estimativa para essa condição utilizando o resultado obtido para $\chi(\vec{r},\vec{r}')$ na teoria de Landau em $\langle\phi\rangle^4$ para o modelo de Ising e com a intridução do termo de Ornstein e Zernicke:

$$\begin{aligned}\chi(\vec{r},0) &= \chi\int\frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d}\frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{1+(q\xi)^2}\\ &= \frac{1}{c}\frac{1}{|\vec{r}|^{(d-2)}}Y(|\vec{r}|/\xi)\end{aligned} \tag{5}$$

onde

$$Y(\eta) = \frac{1}{4\pi}e^{-\eta}\ \ (d=3) \tag{6}$$

e

$$\langle\phi\rangle = \pm\left(\frac{-r}{4u}\right)^{1/2} = \pm\left(\frac{-a(T-T_c)}{4u}\right)^{1/2};\ T<T_c \tag{7}$$

Temos então,

$$\begin{aligned}\left\langle(\delta\phi_{coe})^2\right\rangle &= \frac{T}{V_\xi c}\int_{V_\xi} \mathrm{d}^d r\, |\vec{r}|^{-(d-2)}\, Y(|\vec{r}|/\xi) \\ &= A_d \frac{T}{c}\xi^{-(d-2)} < \frac{|r|}{4u} \end{aligned} \tag{8}$$

onde

$$\xi = \left(\frac{c}{|r|}\right)^{1/2} \tag{9}$$

é o comprimento de correlação e A_d é uma constante uma vez fixada a dimensão d. Podemos reescrever a expressão de forma adimensional,

$$\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{d-4} = \left(\frac{T-T_c}{T_c}\right)^{(4-d)/2} > \frac{A_d}{2\Delta c_V \xi_0^d} \tag{10}$$

onde

$$\xi_0 = \left(\frac{c}{aT_c}\right)^{1/2} \tag{11}$$

é o comprimento de correlação intrínsico (para $T = 0$) e

$$\Delta c_V = \frac{Ta^2}{8u} \tag{12}$$

é a descontinuidade no calor específico por unidade de volume calculado anteriormente na teoria de campo médio. Essa equação foi deduzida para $T < T_c$ mas aplica-se também para $T > T_c$.

Vamos analisar o resultado. Para $d > 4$, ξ^{4-d} diverge na media que $T \to T_c$ e a condição é sempre satisfeita próxima do ponto crítico. Para $d < 4$, ξ^{4-d} tende a zero na medida que $T \to T_c$ e a condição nunca é satisfeita próxima do ponto crítico. A teoria de campo médio produz um resultado consistente para as transições de segunda ordem em ϕ^4 e outros modelos para $d > 4$.

Ela falha para $d < 4$. a dimensão d_c abaixo da qual a teoria de campo médio falha é chamada de *dimensão crítica superior* . Para teorias em ϕ^4 e similares, $d_c = 4$.

Para $d < d_c$ a teoria de campo médio ainda produz resultados válidos para temperaturas suficientemente longe de T_c. Na medida que T aproxima-se de T_c por cima ou por baixo as flutuações tornam-se importantes. A temperatura T_G para as quais isso começa a acontecer é denominada *temperatura de Ginzburg*. Ela pode ser encontrada pela condição

$$t_G = \frac{|T_G - T_c|}{T_c} = \left(\frac{A_d}{2\Delta c_V \xi_0^d}\right)^{2/(4-d)} \tag{13}$$

Podemos introduzir também um *comprimento de Ginzburg*, ξ_G,

$$\xi_G^{4-d} \sim \Delta c_V \xi_0^4 = \frac{c^2}{8uT_c} \tag{14}$$

ou

$$\xi_G \sim \xi_0 (\Delta c_V \xi_0^d)^{1/(4-d)} \tag{15}$$

A teoria de campo médio é válida quando $\xi < \xi_G$ e inválida quando $\xi > \xi_G$. Observe que $|T_G - T_c| \to 0$ quando $\xi_0 \to \infty$ para $d < 4$. Ou seja, a teoria de campo médio é válida mesmo próxima do ponto crítico para $d < d_c$ se o comprimento de coerência intrínsico for grande. Encontramos essa situação para forças de longo alcance e também para os supercondutores. Quanto $|T_G - T_c|$ não é pequeno, podemos esperar um cruzamento entre o comportamento da teoria de camp médio e um comportamento crítico quando a temperatura reduzida $t = |T - T_c| / T_c$ ficar da ordem de t_G. Em três dimensões, podemos calcular A_d mais precisamente e o resultado que temos é

$$t_G = \frac{k_B^2}{32\pi^2 (\Delta c_V)^2 \xi_0^6} \tag{16}$$

onde Δc_V é medido em "$erg - cm^{-3} K^{-1}$.

Vamos considerar alguns exemplos:

(1) A transição esmética-A para esmética-C tem um salto no calor específico da ordem de $10^6\, erg - cm^{-3}K^{-1}$, um comprimento de coerência intrínsico da ordem de 20. Logo, $t_G \sim 10^{-5}$. A temperatura de transição é da ordem de 300 K. Os experimentos realizados não examinam temperaturas reduzidas dessa ordem, logo a teoria de campo médio funciona bem.

(2) Para os supercondutores convencionais temos um salto no calor específico da ordem de $2 \times 10^4\, erg - cm^{-3}K^{-1}$. O espaçamento da rede no Al é de 4 enquanto que o comprimento de coerência intrínsico é da ordem de $1,6 \times 10^4$. Temos então $t_G \sim 10^{-16}$. A temperatura de transição supercondutora do Al é de $1,19\, K$ e é impossível acessar a região crítica. A teoria de campo médio funciona muito bem para os supercondutores convencionais. A razão para isso é o grande valor do comprimento de coerência intrínsico comparado com o parâmetro de rede.

2 Expoentes críticos, universalidade e escala

Durante nosso estudo das fases condensadas abordamos em particular a situação das transições de fase. Isso foi feito dentro da teoria de campo médio e, principalmente, com a teoria de Landau. Foi possível calcular para o modelo de Ising (nosso exemplo) a existência de divergências nas grandezas físicas na transição de fase e obter uma estimativa dos expoentes críticos que governam essas divergências. A Tabela resume esses expoentes. Discutimos também os limites de validade dessa aproximação onde foi possível observar que a teoria de campo médio funciona melhor para maiores dimensões. Na seção anterior, quantificamos esse resultado, onde ficou melhor detalhado a relação entre a dimensão do sistema e o comprimento de correlação com os limites de validade da teoria de campo médio. A Tabela resume vários desses expoentes, seu valor para a teoria de campo médio, os valores obtidos em teorias que vão além da teoria de campo médio e os valores experimentais para vários sistemas físicos (em particular, para os modelos O_n. Observamos que há pouca variação para diferentes sistemas físicos com a mesma dimensão d, mas há uma forte dependência com essa dimensão. Note que na aproximação do campo médio, para o modelo de

Ising, não tínhamos nenhuma dependência com a dimensão. Esse comportamento só vai ficar claro com a teoria de Kenneth Wilson no início dos anos 1970, a *teoria de grupo de renormalização*, que permite calcular os expoentes críticos incluindo os efeitos da flutuação. Nessa teoria demonstrou-se que os expoentes críticos dependem da *dimensão espacial, da simetria do parâmetro de ordem e da simetria e alcance das interações.* Sistemas que apresentam o mesmo conjunto de dimensão e simetrias explicitados apresentam o mesmo expoentes críticos, formando o que se convencionou chamar de *classes de universalidades* . Os expoentes críticos não mostram, protanto, dependência com a forma e a intensidade das interações entre seus constituintes. A Tabela exemplifica isso para vários sistemas físicos.

Susceptibility	$\chi = \Gamma t^{-\gamma}$	$t > 0$
	$\chi = \Gamma'(-t)^{-\gamma'}$	$t < 0$
Specific heat	$C = \frac{A}{\alpha} t^{-\alpha}$	$t > 0$
	$C = \frac{A'}{\alpha'}(-t)^{-\alpha'}$	$t < 0$
Correlation length	$\xi = \xi_0 t^{-\nu}$	$t > 0$
	$\xi = \xi_0'(-t)^{-\nu'}$	$t < 0$
Order parameter	$\langle\phi\rangle = B(-t)^{\beta}$	$t < 0$
	$\langle\phi\rangle = D_c^{-1} h\|h\|^{(1-\delta)/\delta}$	$t = 0$
Correlation function	$G(q) = D_\infty q^{-(2-\eta)}$	$t = 0$

Table 1: Definição dos expoentes críticos e suas amplitudes. Extraído do CL.

Exponent	α	β	γ	ν	η
Property	specific heat	order parameter	susceptibility	coherence length	correlation function
Definition	$C \sim t^{-\alpha}$	$\langle\phi\rangle \sim t^{\beta}$	$\chi \sim t^{-\gamma}$	$\xi \sim t^{-\nu}$	$G(q) \sim q^{-2+\eta}$
Mean-field	0	0.5	1	0.5	0
3D theory					
$n = 0$ (SAW)	0.24	0.30	1.16	0.59	
$n = 1$ (Ising)	0.11	0.32	1.24	0.63	0.04
$n = 2$ (xy)	−0.01	0.35	1.32	0.67	0.04
$n = 3$ (Heisenberg)	−0.12	0.36	1.39	0.71	0.04
Experiment					
3D $n = 1$	$0.11^{+.01}_{-.03}$	$0.32^{+.16}_{-.04}$	$1.24^{.16}_{-.04}$	$0.63^{+.04}_{-.04}$	0.03 - 0.06
3D $n = 3$	$0.1^{+.05}_{-.04}$	$0.34^{+.04}_{-.04}$	$1.4^{+.07}_{-.07}$	$0.7^{+.03}_{-.03}$	
2D $n = 1$	$0.0^{+.01}_{-.003}$	$0.3^{+.04}_{-.04}$	$1.82^{+0.7}_{-.07}$	$1.02^{+.07}_{-.07}$	

Table 2: Exemplos de expoentes críticos, teoria e experimento. Os experimentos para 3D e $n = 1$ foram compilados das transiçoes entre líquido-gás, fluidos binários, ferromagnéticos e antiferromagnéticos. Os experimentos 3D e $n = 3$ foram compilados de transições ferromagnéticas e antiferromagnéticas e, finalmente, os experimentos para 2D e $n = 1$ foram compilados de transições antiferromagnéticas. Extraído de CL.

2.1 Expoentes e relações de escalonamento

Um dos resultados importantes nos expoentes críticos éque eles não são todos independentes. Podemos observar na Tabela 2 que $\gamma \sim 2\nu$ e que $\alpha + 2\beta + \gamma \sim 2$. Essas relações são consequências das propriedades de homogeneidade e escalonamento das funções de correlação e das grandezas termodinâmicas próximas de $T = T_c$. Elas podem ser derivadas na teoria de grupo de renormalização. Já podemos verificar essas relações na teoria de campo médio. Lembremos o resultado obtido anteriormente,

$$G(\vec{r}, 0) = G(|\vec{r}|) = |\vec{r}|^{-(d-2)}\, Y(|\vec{r}|\,/\xi) \tag{17}$$

A unica grandeza de distância é a função de comprimento de correlação ξ. As grandezas

microscópicas que caracterizam o sistema físico não são importantes. Para $T = T_c$, temos $\xi = \infty$ e $G \sim |\vec{r}|^{-(d-2)}$ é uma função homogênea em $|\vec{r}|$,

$$G(|\vec{r}|) = b^{-(d-2)} G(b^{-1} |\vec{r}|) \tag{18}$$

A susceptibilidade χ é a integral de $T^{-1}G(|\vec{r}|)$ em $\vec{r}$,

$$\begin{aligned} \chi &= T^{-1} \int \mathrm{d}^d r G(|\vec{r}|) = T^{-1} \xi^2 \int \mathrm{d}^d y y^{-(d-2)} Y(y) \\ &\sim \xi^2 \sim (T - T_c)^{-\gamma} \end{aligned} \tag{19}$$

A divergência de χ origina-se no aumento do alcance espacial das correlações do campo do parâmetro de ordem. Temos também que $\gamma = 2\nu = 1$, uma vez que $\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$, com $\nu = 1/2$ na teoria de campo médio. O valor de γ já havia sido calculado anteriormente. Agora podemos observar que γ é completamente determinado por ν e a dependência de $G(|\vec{r}|)$ com $|\vec{r}|$ na medida que $T = T_c$.

Em sistemas críticos (que discutiremos mais adiante) a função de correlação $G(|\vec{r}|)$ tem sua dependência em $T = T_c$ caracterizada por um expoente η na forma

$$G(|\vec{r}|) \sim |\vec{r}|^{-(d-2+\eta)} \tag{20}$$

Podemos generalizar a equação 17:

$$G(|\vec{r}|) = |\vec{r}|^{-(d-2+\eta)} Y(|\vec{r}| / \xi) \tag{21}$$

que podeser escrita na forma homogênea,

$$G(|\vec{r}|, t) = b^{-(d-2+\eta)} G(b^{-1} |\vec{r}|, b^{1/\nu} t) \tag{22}$$

e, de $\chi(\vec{q}, t) = T^{-1} G(\vec{q}, t)$, temos

$$\chi(\vec{q},t) = b^{2-\eta}\chi(b\vec{q}, b^{1/\nu}t) \tag{23}$$

Essa equação é geral e não há restrição quanto ao valor de b. Portanto, podemos escolher, quando $t = 0$, $b = 1/|\vec{q}| \equiv 1/q$, e utilizando o fato que o sistema é invariante rotacionalmente, ou seja, deve depender apenas do módulo de $\vec{q}$, temos

$$\chi(\vec{q}, t = 0) \sim q^{-(2-\eta)} \tag{24}$$

Podemos também escolher $b = |t|^{-\nu}$:

$$\chi(\vec{q},t) = |t|^{-\gamma}\,\chi(\vec{q}\,|t|^{-\nu}\,, t/\,|t|) \tag{25}$$

onde

$$\gamma = (2-\eta)\nu \tag{26}$$

que é o expoente crítico da susceptibilidade para $\chi(t) = \chi(\vec{q} = 0, t)$. Poderíamos igualmente ter obtido esse resultado a partir da equação 21:

$$\begin{aligned} \chi(\vec{q} \;=\; 0,t) &= T^{-1}\int \mathrm{d}^d\vec{r}G(\vec{r},t) = T^{-1}\int \mathrm{d}^d\vec{r}\,|\vec{r}|^{-(d-2+\eta)}\,Y(|\vec{r}|\,/\xi) \\ &\sim \xi^{(2-\eta)} \sim |t|^{-\nu} \end{aligned} \tag{27}$$

Devemos observar que a dependência de $\chi(\vec{q},t)$ é em $\vec{q}\,|t|^{-\nu}$ e em $t/\,|t| = \pm 1$. Logo, a função de escala de $\chi(\vec{q},t)$ deve diferenciar-se quando $t > 0$ de $t < 0$. Escrevemos de forma geral,

$$\chi(\vec{q},t) = |t|^{-\gamma}\,X_2(q\,|t|^{-\nu}) \tag{28}$$

onde

$$X_2(u) = \chi(\vec{q}u/q, \pm 1) \tag{29}$$

Em $q\xi = 0$, X_2 depende apenas do sinal de t. A notação usual é indicarmos os coeficientes ou funções com $'$ quando $t < 0$ e sem nenhuma marcação para $t > 0$. Para $t = 0$, $\chi(\vec{q}, t)$ é independente de t. Para isso é necessário que $X_2(u) \sim u^{-\gamma/\nu}$ na medida que $u \to \infty$. Podemos resumir as formas limtes de X_2

$$X_2(u) \to \begin{cases} \Gamma, & u \to 0,\ t > 0 \\ D_\infty u^{-\gamma/\nu}, & u \to \infty \\ \Gamma', & u \to 0,\ t < 0 \end{cases}$$

A equação 22 pode ser utilizada para determinar o expoente β do parâmetro de ordem em termos de ν e η. Escrevendo

$$\bar{G}(\vec{r}, 0) = \langle \phi(\vec{r})\phi(0) \rangle \tag{30}$$

então,

$$\bar{G}(\vec{r}, 0) = G(|\vec{r}|) + \langle \phi(\vec{r}) \rangle \langle \phi(0) \rangle \tag{31}$$

são idênticos para $T > T_c$, nõs esperamos que $\bar{G}$ siga as mesmas leis de escala que G. Para $T < T_c$, $\langle \phi(\vec{r}) \rangle$ é diferente de zero e temos

$$\lim_{|\vec{r}| \to \infty} \bar{G}(|\vec{r}|) \to \langle \phi \rangle^2 \sim |T - T_c|^\beta \tag{32}$$

Escolhendo agora $b = |t|^{-\nu}$ na equação 22, temos

$$\lim_{|\vec{r}| \to \infty} G(|\vec{r}|, t) \to |t|^{(d-2+\eta)\nu} \tag{33}$$

que é independente de $\vec{r}$. Comparando as duas equações, temos

$$\beta = \frac{1}{2}(d - 2 + \eta)\nu \tag{34}$$

Essa relação envolve a dimensão d. Sempre que as relações envolvem a dimensão, chamamo-as de *relações de hiper-escalonamento*. Podemos combinar com a equação 26 e obter

$$\gamma + 2\beta = d\nu \tag{35}$$

novamente uma relação de hiper-escalonamento. Os expoentes nas duas relações só estão corretos na teoria de campo médio para $d_c = 4$. Para dimensões maiores ela falha, por razões que não entraremos em consideração aqui, e postergaremos essa discussão para mais adiante.

Vamos analisar agora o expoente do calor específico. Sabemos que ele diverge na forma

$$c_V \sim |t|^{-\alpha} \tag{36}$$

O calor específico é a segunda derivada da densidade de energia livre em relação a temperatura. A densidade de energia livre tem unidades de energia dividida pelo volume. A escala de energia acompanha a temperatura de transição T_c e o volume por ξ^d. Logo,

$$f \sim T_c \xi^{-d} \sim T_c \xi_0^{-d} t^{d\nu} \tag{37}$$

e

$$c_v = -T\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \sim |T - T_c|^{d\nu - 2} \tag{38}$$

de onde tiramos que

$$\alpha = 2 - d\nu \tag{39}$$

Novamente, uma relação de hiper-escalonamento que só é válida na teoria de campo médio para

$d_c = 4$. Combinando as relações, temos

$$\gamma + 2\beta + \alpha = 2 \tag{40}$$

Esse hiper-escalonamento aplica-se em geral para transições onde as flutuações dominam e a teoria de campo médio falha. Quando ele se aplica, temos apenas dois expoentes críticos independentes, por exemplo, η e ν e o ponto crítico obede *o fator de universalidade de duas escalas.*

2.2 Escala da equação de estado

A teoria do grupo de renormalização mostra que qualquer função termodinâmica obedece uma relação de homogeneidade na qual t e os campos externos (como h) são re-escalonados com fatores diferentes. Esse resultado é obtido experimentalmente também.

Seguindo a nomenclatura do CL, vamos continuar usando f para a densidade de energia livre na presença de campo externo. A densidade de energia livre obedece a relação

$$f(t,h) = b^{-d} f(b^{1/\nu} t, b^{\lambda} h) \tag{41}$$

Na ausência de campo externo, temos $f \sim \xi^{-d}$, como já sabíamos. Podemos calcular agora o parâmetro de ordem e a susceptibilidade:

$$\langle \phi \rangle = \frac{\partial f}{\partial h} = b^{-d+\lambda} f'(b^{1/\nu} t, b^{\lambda} h) \tag{42}$$

$$\chi = \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} = b^{-d+2\lambda} f''(b^{1/\nu} t, b^{\lambda} h) \tag{43}$$

Escolhendo $b = t^{-\nu}$, temos

$$\begin{aligned} \beta &= d\nu - \Delta \\ \gamma &= -d\nu + 2\Delta \end{aligned} \tag{44}$$

onde

$$\Delta \equiv \lambda\nu = \beta + \gamma \tag{45}$$

O expoente Δ é conhecido como *expoente do gap*.

Escolhendo $b = |t|^{-\nu}$, podemos reescrever

$$\begin{aligned} f(t,h) &= |t|^{2-\alpha} X_0(h/t^{\Delta}) \\ \langle\phi\rangle &= |t|^{\beta} X_1(h/|t|^{\Delta}) \\ \chi &= |t|^{-\gamma} X_2(h/|t|^{\Delta}) \end{aligned} \tag{46}$$

onde cada função X_i escala de forma dependente do sinal de t.

A fig. mosstra o resultado obtido para o escalonamento de um ferromagneto de Heisenberg (O_3), EuO. A magneticização dividida por $|t|^{\beta}$ é função de $h/|t|^{\Delta}$ e não de h e t separadamente. Observe que a função de reescalonamento $X_1(u)$ difere para $t > 0$ e $t < 0$.

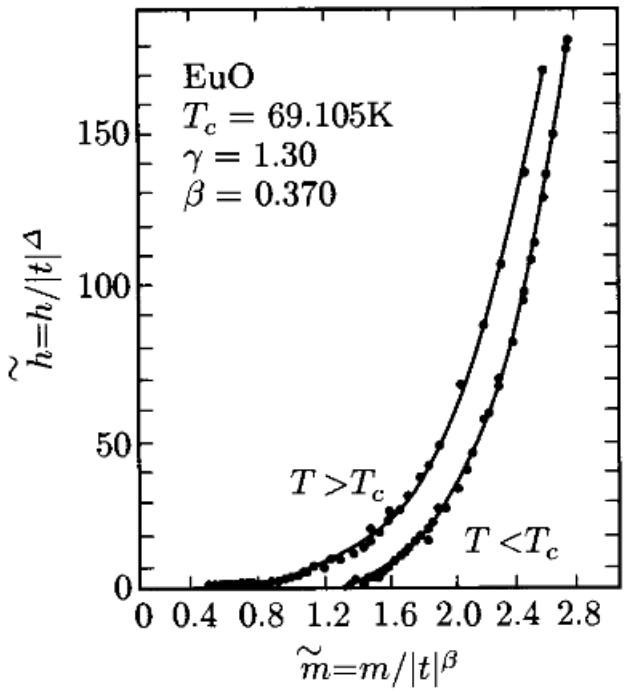

Figure 1: Equação de estado experimental para o ferromagnético EuO no ponto crítico. Extraído de CL, ref. original C.-C. Huang et al., Phys. Rev. B**12**, 5255 (1975).

3 Grupo de Renormalização

As idéias da teoria de grupo de renormalização são construídas ao longo de muitos anos. Não vamos aprofundar aqui, mas convém mencionar algumas etapas fundamentais:

- Podemos dizer que a partir da primeira proposta de uma teoria de campo médio (van-der-Waals, para os fluidos), temos um período de desenvolvimento da teoria de campo médio, entre 1860 e 1937.

- Entre 1937 e 1963/1971 há um período de grande inquietude uma vez que fica claro que a teoria de campo médio não funciona para os fenômenos críticos.

- O trabalho de Onsager, em 1944, que calcula exatamente o modelo de Ising em duas dimensões, deixa claro que a teoria de campo médio não funciona. Ref.: L. Onsager, Phys. Rev. **65**, 117 (1944).

- Cyril Domb, Martin Skyes e Michael Fisher (1949) calculam os expoentes críticos utilizando o método de expansão em séries e mostram que os resultados da teoria de campo médio não estão corretor.

- Ben Widom identifica a maior parte das relações de escalonamento mas não identifca suas origens. Refs. B. Widom, J Chem. Phys. **41** ,1643 (1964) e B. Widom, J. Chem. Phys. **43**, 3892 and 3896 (1965).

- Patashnskii e Pokrovski estudam as correlações das flutuações, principalmente basados nos resultados de Widom. Ref. A.Z. Patashinskii and V.L. Pokrovsky ",Soviet Phys. JETP, 19 667(1964).

- L. Kadanoff (1966) apresenta idéias heurísticas que explicam muitas dos resultados da renormalização.

- Kenneth Wilson (1971) resolve o problema da teoria de grupo de renormalização, explicando a natureza da universalidade e do reescalonamento.

Vamos discutir aqui o modelo de Kadanoff e, havendo tempo, introduziremos as idéias de Wilson.

3.1 Método de Kadanoff

Vamos considerar uma rede de dimensão d com N sítios e constante de rede a. Assumimos agora um sistema físico que é descrito pelo modelo de Ising, com spins $s(\vec{y})$ nos sítios $\vec{y}$. No ponto crítico o comprimento de correlação ξ é infinito. Os spins em diferentes posições espaciais estão fortemente correlacionado. Podemos introduzir um *spin médio*,

$$s_{av}(\vec{r}) = b^{-d} \sum_{\vec{y} \in c(\vec{r})} s(\vec{y}) \tag{47}$$

onde $c(\vec{r})$ é uma célula com b^d sítios centrada em $\vec{r}$. O spin médio tem o mesmo comportamento quando no ponto crítico que $s(\vec{y})$. A função de correlação do spin médio diminui com a distância com a mesma lei de potência que a função de correlação do spin original:

$$b^{-2d} \sum_{\vec{y}_1 \in c(\vec{r})} \sum_{\vec{y}_2 \in c(\vec{r})} \langle s(\vec{y}_1) s(\vec{y}_2) \rangle = \langle s_{av}(\vec{r}_1) s_{av}(\vec{r}_2) \rangle \sim |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{-2\omega} \tag{48}$$

onde

$$\omega = \frac{1}{2}(d - 2 + \eta) = \frac{\beta}{\nu} \tag{49}$$

A figura 2 mostra o esquema para a construção de Kadanoff. A célula original é dividia em $N' = N/b^d$ células centradas na nova rede com constante de rede $a' = ba$. Cada célula centrada em $\vec{r}$ na rede original possui b^d sítios da célula original e corresponde a um sítio na nova rede. As distâncias na nova rede são medidos em relação a nova constante de rede a'. Assim, a posição do sítio na nova rede corresponde a célula em $\vec{r}$ da rede original, ou seja, $\vec{r}' = \vec{r}/b$. Em cada sítio $\vec{r}/b$ da nova rede temos uma variável de spin em bloco, que é proporcional ao spin médio da célula centrada no sítio:

$$s'(\vec{r}') = s'(\vec{r}/b) = b^{\omega_s} s_{av}(\vec{r}) \tag{50}$$

As funções de correlação de $s_{av}(\vec{r})$ e $s(\vec{y})$ para $\vec{y}$ na célula centrada em $\vec{r}$ escalam da mesma forma no ponto crítico. Com isso não precisamos distinguir $s_{av}(\vec{r})$ de $s(\vec{r})$ e podemos escrever

$$s'(\vec{r}/b) = b^{\omega_s} s(\vec{r}) \tag{51}$$

O argumento de Kadanoff é que existe um hamiltoniano que é função das variáveis de spin em bloco na nova rede. No ponto crítio, esse novo hamiltoniano é de alguma forma idêntico ao hamiltoniano original expresso em termos de $s(\vec{y})$ na rede original. Em particular, a função de correlação da variável de spin em bloco que é função das distâncias medidas na nova rede deve ser idêntica a função de correlação da variável de spin origina como função da distância da rede original. Ou seja,

$$\langle s'(\vec{r}_1/b)s'(\vec{r}_2/b)\rangle = b^{2\omega_s}\,\langle s_{av}(\vec{r}_1)s_{av}(\vec{r}_2)\rangle \sim \left|\frac{\vec{r}_1}{b} - \frac{\vec{r}_2}{b}\right|^{-2\omega} \tag{52}$$

Comparando as equações 48 e 52 temos

$$\omega_s = \omega \tag{53}$$

O expoente ω determina a relação entre as variáveis de spin original e do bloco.

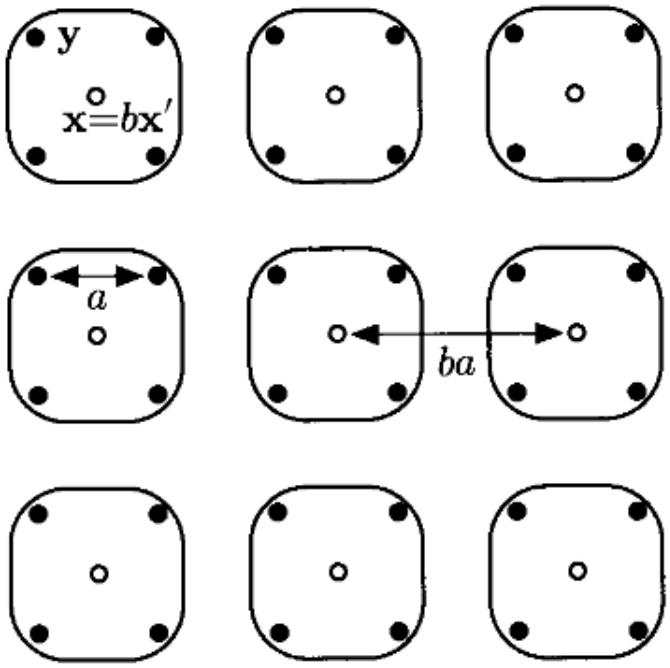

Figure 2: Esquema de construção de Kadanoff com "coarse-graining". Nesse exemplo o parâmetro de escala é $b = 2$. Extraído de CL.

3.2 Aplicação: modelo de Ising em uma dimensão

Vamos considerar um exemplo simples, que tem solução exata, para entendermos melhor as idéias discutidas acima. Por falta de tempo, não vamos detalher muito o resultado. Para uma versão pedagógica, sugerimos a ref. 2. Aqui, vamos seguir resumidamente os passos do CL, na ausência de um campo externo.

Solução exata O hamiltoniano de Ising em uma dimensão e na ausência de campo externo pode ser escrito de forma geral

$$\begin{aligned} -\bar{\mathcal{H}} &= -\frac{\mathcal{H}}{T} = K\sum_i \sigma_i\sigma_{i+1} + L\sum_i \sigma_i + \sum_i C \\ &= K\sum_i \sigma_i\sigma_{i+1} + \frac{1}{2}L\sum_i(\sigma_i + \sigma_{i+1}) + \sum_i C \\ &= \sum_i \bar{K}(\sigma_i, \sigma_{i+1}) \end{aligned} \tag{54}$$

onde $K = J/T$ e $L = h/T$, sendo que J é a integral de troca e h é o campo magnético externo. C é uma constante que define o zero de energia.

Para calcularmos a função de partição utilizamos matrizes de transferência. Vemos que podemos escrever a expoentencia de $\bar{K}(\sigma, \sigma')$ na forma

$$e^{\bar{K}(\sigma,\sigma')} = e^C \begin{bmatrix} e^{K+L} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K+L} \end{bmatrix} \equiv \bar{M}(K, L, C) \tag{55}$$

Quanto $h = 0$ e $C = 0$, temos

$$\bar{M}(K, 0, 0) = \cosh K(1 + \sigma\sigma' \tanh K) \tag{56}$$

Para calcular a função de partição vamos utilizar condições de contorno periódicas. Com isso, podemos escrever

$$Z_N = \sum_{\sigma\prime,\ldots,,\sigma_N} e^{-\bar{\mathcal{H}}} = \mathrm{Tr}\bar{M}^N = e^{NC}(\lambda_+^N + \lambda_-^N) \tag{57}$$

onde $\lambda_\pm$ são autovalores de $\bar{M}(K, L, 0)$,

$$\lambda_\pm = e^K \cosh L \pm (e^{2K}\sinh^2 L + e^{-2K})^{1/2} \tag{58}$$

Na ausência de campo, $h = 0$, o autovalor maior é $\lambda_+ = 2\cosh K$. No limite de N grande, λ_-^N pode ser desprezado e a energia livre por spin é

$$\begin{aligned} \frac{f}{T} &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}[-Z_N] \\ &= -C - \ln[e^K \cosh L + (e^{2K}\sinh^2 L + e^{-2K})^{1/2}] \end{aligned} \tag{59}$$

e, para $T(K \to \infty)$ pequeno e $h(L \to 0,\ Le^{2K} \ll 1)$ pequeno, temos

$$f - f_0 \to -Te^{-2K} - \frac{1}{2}e^{2K}\left(\frac{h^2}{T}\right) \tag{60}$$

onde

$$f_0 = -J - TC \tag{61}$$

A energia por spin do estado fundamental é J quando $C = 0$ e temos um gap no espectro de excitação com uma dependência exponencial com a temperatura no estado fundamental. A susceptibilidade a baixas temperaturas é

$$\chi = -\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} = \frac{1}{T}e^{2K} \tag{62}$$

Temos a divergência de χ para $T \to 0$, o que indica que há um ponto crítico em $T = 0$ no modelo de Ising em uma dimensão. Esse resultado era esperado qualitativamente uma vez que em uma dimensão não deveríamos esperar uma transição para fase ordenada para temperaturas não nulas. A fase a $T = 0$ é com os spins totalmente ordenados enquanto que a $T \neq 0$, os spins aparecem desordenados.

Renormalização Vamos proceder agora com o processo de renormalização de Kadanoff. Para isso, vamos reescrever a rede em bolocs de $b - 1$ spins, deixando um spin em cada sítio como na

figura . A função de partição da nova rede é igual a da rede original e pode ser escrita na forma

$$Z_N(K, L, C) = \mathrm{Tr}\bar{M}^N = \mathrm{Tr}[\bar{M}^b]^{N'} = Z_{N'}(K', L', C') \tag{63}$$

onde $N' = N/b$ é o número de sítios da nova rede. Os potencias da rede decimada podem ser determinados por

$$\bar{M}(K', L', C') = \bar{M}^b(K, L, C) \tag{64}$$

Quando $L = 0$, temos

$$\begin{aligned} \tanh K' &= (\tanh K)^b \\ \Rightarrow K' &= \tanh^{-1}[(\tanh K)^b] \end{aligned} \tag{65}$$

Essa equação é a *relação de recursão do grupo de renormalização.* Ela pode ser iterada um certo número de vezes e, no infinito, K chega a um *ponto fixo* K^*, tal que $K' = K = K^*$. Nesse caso temos apenas dois pontos fixos:

$$\begin{aligned} \tanh K &= 0 \ (K = \infty) \\ \tanh K &= 1 \ (K = 0) \end{aligned} \tag{66}$$

$\tanh K$ diminui a cada iteração aproximando-se do ponto fixo $\tanh K = 0$ na medida que o número de interações tendem ao infinito. Se $K = \infty$, $\tanh K$ permanece com valor unitário qualquer número de iterações. Como todos os valores de K outros que não seja $K = \infty$ tendem a $K = 0$, dizemos que o ponto fixo $\tanh K = 0 (T = \infty)$ é *estável.* O ponto fixo em $K = \infty$ é *instável*, uma vez que os pontos de atração para esse valor é apenas o próprio ponto $K = \infty$. A figura resume essa descrição.

O ponto fixo estável descreve o comportamento para todas as temperaturas finitas. Ele está associado a fase paramagnética. O ponto instável descreve a transição de fase em $T = 0$.

O comprimento de correlação é

$$\xi' = \xi/b \tag{67}$$

ou seja, o comprimento de correlação medido no parâmetro de rede da nova rede é b^{-1} vezes o comprimento de correlação medido na rede original. O comprimento de correlação diminui na medida que ele é reescalonado. Temos apenas dois pontos fixos: $\xi = 0$ e $\xi = \infty$.O segundo caso corresponde ao ponto crítico enquanto que o primeiro corresponde a temperaturas altas não críticas.

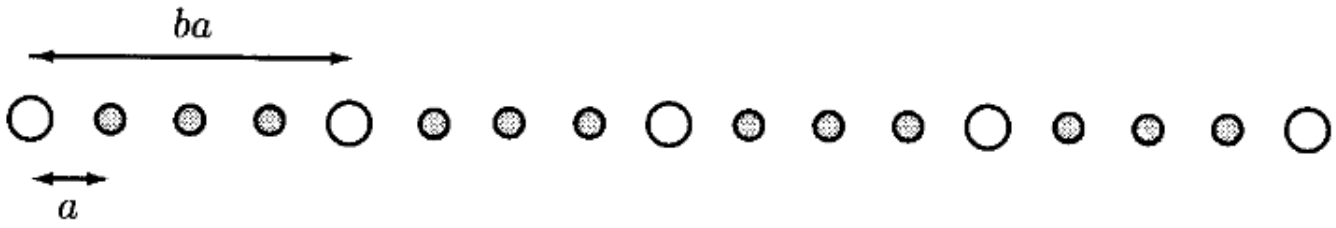

Figure 3: Esquema de decimação de uma cadeia de Ising unidimensional. Extraído de CL.

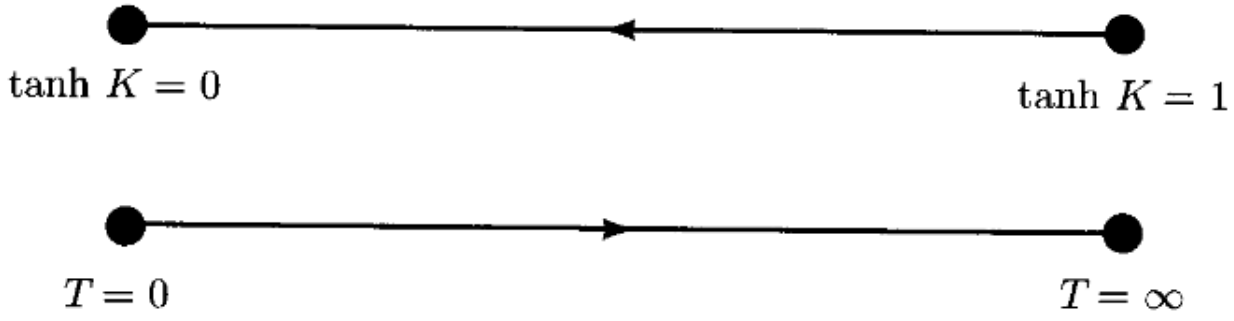

Figure 4: Fluxo do grupo de renormalização para $\tanh K$ e T, mostrando os pontos fixos estável em $\tanh K = 0\,(T = \infty)$ e instável em $\tanh K = 1\,(T = 0)$. Extraído de CL.

References

[1] Chaikin e Lubenski, **Condensed Matter Physics**, Oxford.

[2] H.J. Maris e L.P. Kadanoff, "Teaching the renormalization group", *Am. J. Phys.* **46**, 652 (1978).