

menor ordem diverge, devemos esperar que as outras contribuições também divergem.

- Podemos dizer que para $d > 4$ a singularidade não é modificada pelas flutuações. Isso vale também se considerarmos as ordens superiores (além da primeira ordem considerada aqui). Isso não significa que a teoria de campo médio funciona melhor quanto maior a dimensão. Os expoentes críticos mudam com d para $d < 4$ mas permanecem constantes e iguais aos valores obtidos pela teoria de campo médio para $d > 4$.
- Observando a equação 60 podemos dizer que, embora a teoria de campo médio falha próxima a T_c , ela produz resultados aceitáveis em uma região crítica, com as flutuações sendo responsável apenas por uma pequena contribuição. Pode-se mostrar que a região aceitável é aquela prevista por Ginzburg, já discutida. Uma discussão sobre esse caso, nesse modelo, está no CL.
- Última observação, para entendermos o comportamento crítico para $d \leq 4$ temos que buscar soluções não-perturbativas. A solução é a encontrada por K. Wilson em 1971, com a teoria de grupo de renormalização.

2 Grupo de Renormalização

As idéias da teoria de grupo de renormalização são construídas ao longo de muitos anos. Não vamos aprofundar aqui, mas convém mencionar algumas etapas fundamentais:

- Podemos dizer que a partir da primeira proposta de uma teoria de campo médio (van-der-Waals, para os fluidos), temos um período de desenvolvimento da teoria de campo médio, entre 1860 e 1937.
- Entre 1937 e 1963/1971 há um período de grande inquietude uma vez que fica claro que a teoria de campo médio não funciona para os fenômenos críticos.

- O trabalho de Onsager, em 1944, que calcula exatamente o modelo de Ising em duas dimensões, deixa claro que a teoria de campo médio não funciona. Ref.: L. Onsager, Phys. Rev. **65**, 117 (1944).
- Cyril Domb, Martin Skyes e Michael Fisher (1949) calculam os expoentes críticos utilizando o método de expansão em séries e mostram que os resultados da teoria de campo médio não estão corretos.
- Ben Widom identifica a maior parte das relações de escalonamento mas não identifica suas origens. Refs. B. Widom, J Chem. Phys. **41**, 1643 (1964) e B. Widom, J. Chem. Phys. **43**, 3892 and 3896 (1965).
- Patashniskii e Pokrovski estudam as correlações das flutuações, principalmente basados nos resultados de Widom. Ref. A.Z. Patashniskii and V.L. Pokrovsky ",Soviet Phys. JETP, 19 667(1964).
- L. Kadanoff (1966) apresenta idéias heurísticas que explicam muitas dos resultados da renormalização.
- Kenneth Wilson (1971) resolve o problema da teoria de grupo de renormalização, explicando a natureza da universalidade e do reescalamento.

Vamos discutir aqui o modelo de Kadanoff e a seguir o modelo de Wilson. Os exemplos que consideraremos serão o modelo de Ising e o modelo ϕ^4 .

2.1 Escalonamento

Vamos revisar rapidamente a discussão sobre escalas. Nosso objetivo é entendermos como o sistema físico escala quando fazemos uma alteração de escala no sistema físico. Por exemplo, consideremos um modelo de Ising em um "cubo" de dimensão- d e periodicidade a . Vamos fazer agora um reescalamento na dimensão espacial por uma proporção b . Ou seja, a nova dimensão da rede é

$$a \rightarrow a' = ba \quad (66)$$

O número de spins no sistema N' é

$$N' = b^{-d}N \quad (67)$$

Esperamos que a densidade de spins permaneça a mesma. Para isso, as distâncias espaciais devem ser reescaladas por um fator b , ou seja,

$$\vec{r}' = b^{-1}\vec{r} \quad (68)$$

Com isso garantimos que a densidade de spins no novo sistema é a mesma do sistema antigo.

Podemos também analisar o reescalonamento sob o ponto de vista da função de partição. Para o sistema inicial temos

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp[-\beta\mathcal{H}_N[\sigma_i]] \quad (69)$$

Somamos agora sobre $N - N'$ spins, ficando apenas para somar sobre os demais N' spins.

Podemos esperar poder escrever a função de partição na forma

$$Z = \sum_{\{\sigma'\}} \exp[-\beta\mathcal{H}_{N'}[\sigma'_i]] \quad (70)$$

Podemos esperar então que a energia livre do novo sistema é a mesma do sistema original, pelo menos na parte singular da energia livre (responsável pelo comportamento crítico). A relação entre a densidade de energia livre dos dois sistemas deve ser do tipo

$$N'f(t', h') = Nf(t, h) \quad (71)$$

ou,

$$f(t, h) = b^{-d} f(t', h') \quad (72)$$

Como t e t' devem ser pequenos, podemos assumir uma relação linear

$$t' = b^{D_t} t \quad (73)$$

Da mesma forma, podemos assumir

$$h' = b^{D_h} h \quad (74)$$

Escrevemos então

$$f(t, h) = b^{-d} f(b^{D_t} t, b^{D_h} h) \quad (75)$$

Vamos assumir agora que f não deve se alterar com a mudança de escala, ou seja, não deve apresentar uma dependência em b . Nesse caso, b deve desaparecer da equação 75. Para isso, devemos substituir as variáveis h' e t' por uma única variável que não dependa de b :

$$\frac{h'}{|t'|^{D_h/D_t}} = \frac{b^{D_h} h}{|t|^{D_h/D_t} (b^{D_t})^{D_h/D_t}} = \frac{h}{|t|^{D_h/D_t}} = \frac{h}{|t|^\Delta} \text{ onde } \Delta = \frac{D_h}{D_t} \quad (76)$$

A densidade de energia livre deve ter uma dependência do tipo

$$f(t', h') = |t'|^{d/D_t} \tilde{f}(h'/|t'|^\Delta) \quad (77)$$

e, também,

$$f(t, h) = |t|^{d/D_t} \tilde{f}(h/|t|^\Delta) \quad (78)$$

Mas análise anterior (ver capítulo 9, curso I), temos

$$f(t, h) = |t|^{2-\alpha} X_0(h/t^\Delta) \quad (79)$$

de onde temos

$$\alpha = 2 - \frac{d}{D_t} \quad (80)$$

Seguindo análises similares, pode-se mostrar (ver capítulo 9, curso I),

$$\begin{aligned} \beta &= 2 - \alpha - \Delta = (d - D_h)/D_t \\ \gamma &= -(2 - \alpha - 2\Delta) = (2D_h - d)/D_t \\ \delta &= \frac{\Delta}{\beta} = \frac{D_h}{(d - D_h)} \end{aligned} \quad (81)$$

Vamos ainda considerar o comprimento de correlação ξ' reescalado a partir do valor original ξ . Sabemos que

$$\xi' = b^{-1}\xi \quad (82)$$

Mas, ao mesmo tempo, temos que $\xi' \sim |t'|^{-\nu}$, da mesma forma que $\xi \sim |t|^{-\nu}$. Logo,

$$\frac{\xi'}{\xi} = \left(\frac{t'}{t}\right)^{-\nu} = b^{-\nu D_t} \quad (83)$$

de onde temos que

$$\nu = \frac{1}{D_t} \quad (84)$$

e

$$d\nu = 2 - \alpha \quad (85)$$

Da função de correlação, temos

$$\begin{aligned} g(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \langle \delta\phi(\vec{r}_1)\delta\phi(\vec{r}_2) \rangle \sim |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{-(d-2+\eta)} \\ g(\vec{r}'_1, \vec{r}'_2) &= \langle \delta\phi(\vec{r}'_1)\delta\phi(\vec{r}'_2) \rangle \sim |\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2|^{-(d-2+\eta)} \end{aligned} \quad (86)$$

de onde temos que

$$\phi'(\vec{r}') = b^{(d-2+\eta)/2} \phi(\vec{r}) \quad (87)$$

de onde podemos escrever

$$\eta = d + 2 - 2D_h \quad (88)$$

2.2 Método de Kadanoff: decimação no espaço real

Metodologia básica

Vamos considerar uma rede de dimensão d com N sítios e constante de rede a . Utilizaremos como modelo de estudo um sistema físico que é descrito pelo modelo de Ising, com spins $s_i = \pm 1$ nos sítios i . No ponto crítico o comprimento de correlação ξ é infinito. Os spins em diferentes posições espaciais estão fortemente correlacionado. A idéia básica do método é gerar uma nova rede, com um parâmetro de rede renormalizado,

$$a' = ba \quad (89)$$

Com isso, produzimos uma nova rede, onde cada novo sítio é identificado com um novo spin, que denominaremos *spin de bloco* ("block spin"), s' . Vamos indexar os novos sítios por I_α (s_α) (ver fig. 3). O reescalonamento de Kadanoff consiste em mapearmos os valores dos spins da rede original na nova rede. Não há uma única forma de procedermos e diferentes mapeamentos levarão,

em princípio, a diferentes esquemas de *grupo de renormalização*. A segunda etapa consiste em encontrarmos as interações efetivas entre os novos spins, ou seja, obter um novo hamiltoniano para a nova rede.

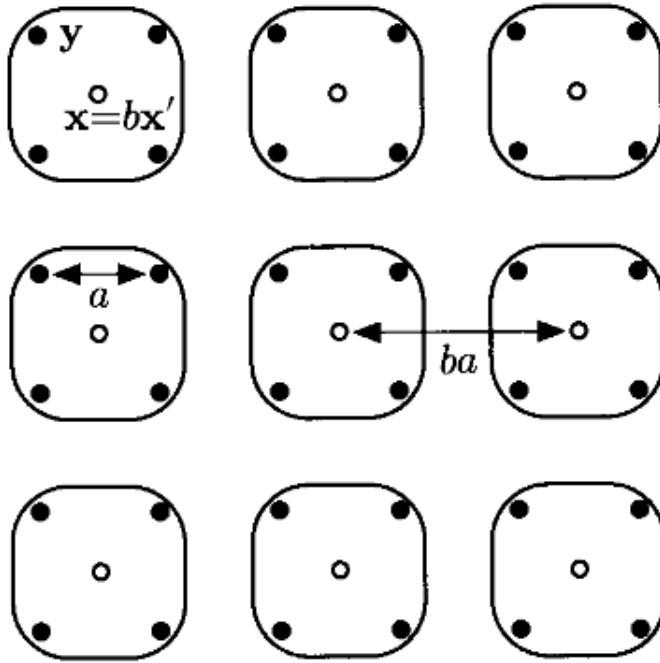


Figure 3: Esquema de construção de Kadanoff com “coarse-graining”. Nesse exemplo o parâmetro de escala é $b = 2$. Extraído de CL.

Vamos agora aplicar para o caso do modelo de Ising explicitamente. O que faremos a seguir baseia-se no cap. 18 da ref. 2 cap. 10 da ref. 4 e da ref. 5, que é o trabalho original.

A função de partição do sistema original é

$$\mathcal{G}(h, t) = \exp(-G(h, t)/k_B T) = \sum_{\{s\}} \exp(-\mathcal{H}[\{s\}]/k_B T) \quad (90)$$

Vamos escolher o zero de energia tal que

$$\sum_{\{s\}} \mathcal{H}[\{s\}] = 0 \quad (91)$$

onde $\{s\}$ representa todas as configurações de spin possíveis.

Vamos definir a variável

$$S_\alpha = \prod_{i \in I_\alpha} s_i \quad (92)$$

O hamiltoniano mais geral que podemos escrever, do tipo Ising, é

$$\mathcal{H}\{S\} = \sum_{I_\alpha} \sum_{\alpha} K_\alpha S_\alpha \quad (93)$$

onde o termo do fator de Boltzmann foi incorporado na forma $K_\alpha = J_\alpha/k_B T$.

Se estabelecemos um hamiltoniano do tipo de Ising, então temos

$$\sum_{\{S\}} S_\alpha S_\beta = 2^N \delta_{\alpha\beta} \quad (94)$$

onde a soma sobre $\{S\}$ equivale a dupla soma sobre I_α e α . Podemos agora encontrar os parâmetros K_α , em princípio, pela expressão,

$$K_\alpha = 2^{-N} \sum_{I_\alpha} \sum_{\alpha} S_\alpha \mathcal{H}\{S\} \quad (95)$$

Vamos limitar a análise aos hamiltonianos homogêneos, isto é, vamos chamar de a a classe de todos os subconjuntos de sítios I_α para os quais podemos identificar uma operação de simetria da rede. Restringiremos os sistemas para os quais todos os K_α de $I_\alpha \in a$ têm o mesmo valor. Nesse caso, podemos escrever

$$\mathcal{H}[\{s\}] = \sum_{I_\alpha} \sum_{\alpha} K_\alpha S_\alpha = \sum_a K_\alpha \sum_{I_\alpha \in a} \sum_{\alpha} S_\alpha \quad (96)$$

ou,

$$\mathcal{H}[\{S\}] = K_1 \sum_{i=1}^N s_i + K_2 \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j + K_2' \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} s_i s_j + K_3 \sum_{\langle i,j,k \rangle} s_i s_j s_k + \dots \quad (97)$$

onde $\langle i,j \rangle$ refere-se aos primeiros vizinhos, $\langle\langle i,j \rangle\rangle$, aos segundos vizinhos, e assim por diante, $\langle i,j,k \rangle$ aos tripletos primeiros vizinhos, etc. Podemos identificar por exemplo $K_1 = -h/k_B T$,

$K_2 = J/k_B T$, etc. O mesmo acontece com os hamiltonianos \mathcal{H} .

Vamos agora renormalizar a rede para uma rede cúbica com b sítios em cada bloco B para cada dimensão. Temos então b^d spins em cada bloco B . Vamos denominar os spins dos blocos como s' . Temos então

$$s'_B = f \{s\}_B \quad (98)$$

onde f mapeia os $\{s\}_\alpha$ spins no conjunto $\{1, -1\}$. Vamos definir

$$P_B = \delta_K(s', f \{s\}_B) \quad (99)$$

onde δ_K é o delta de Kronecker. Essa função nos diz se uma configuração em particular produz o valor $s'_B = 1$ ou $s'_B = -1$. Vamos introduzir agora uma função peso

$$P \{s', s\} = \prod_B P_B \quad (100)$$

onde o produto é sobre todos os blocos. Ela depende do conjunto de todos os spins dos blocos, $\{s'\}$ e o conjunto de todos os spins originais, $\{s\}$. Essa função tem as propriedades

$$\begin{aligned} P \{s', s\} &\geq 0 \\ \sum_{\{s'\}} P \{s', s\} &= 1 \end{aligned} \quad (101)$$

A função de partição pode ser escrita como

$$Z = \sum_{\{s\}} \mathcal{H}[\{s\}] = \sum_{\{s'\}} \sum_{\{s\}} P \{s', s\} e^{-\mathcal{H}\{s\}} \quad (102)$$

Definimos o hamiltoniano $\mathcal{H} \{s'\}$ escrevendo a função de partição na forma

$$e^{-G_0 + \mathcal{H}'[\{s'\}]} = \sum_{\{s\}} P\{s', s\} e^{-\mathcal{H}[\{s\}]} \quad (103)$$

com a condição

$$\sum_{\{s'\}} \mathcal{H}[\{s'\}] = 0 \quad (104)$$

Podemos agora introduzir uma energia livre para os spins de bloco, $G' = N'g'$, onde g' é a densidade de energia livre,

$$e^{-G'} = \sum_{\{s'\}} e^{-\mathcal{H}'[\{s'\}]} \quad (105)$$

e escrevendo $G = Ng$ e $G_0 = N\mu$, Temos a relação entre as energias livres,

$$G_0 + G' = G \quad (106)$$

Podemos escrever o novo hamiltoniano da forma mais geral possível, $\mathcal{H}'[S']$, introduzindo um conjunto de constantes de acoplamento $\{K'_\alpha\}$. Expressando os conjuntos de constantes de acoplamento $\{K_\alpha\}$ e $\{K'_\alpha\}$ por K e K' , respectivamente, podemos esperar que as energias tenham a mesma forma, ou seja,

$$\begin{aligned} G &= Ng(K) \\ G' &= N'g(K') \\ G_0 &= N\mu(K) \end{aligned} \quad (107)$$

Dessa forma, lembrando que $N' = Nb^{-d}$, $b > 1$, temos

$$g(K) = \mu(K) + b^{-d}g(K') \quad (108)$$

Podemos reconstruir os parâmetros K'_α da mesma forma que os parâmetros K_α :

$$K'_\alpha = 2^{-N'} \sum_{\{S'\}} S'_\alpha \mathcal{H}'[\{S'\}] \quad (109)$$

A equação de recorrência 108 nos permite aplicá-la iterativamente para obtermos o resultado desejado, que discutiremos a seguir. As constantes de acoplamento relacionam-se na forma

$$K \rightarrow K' = R(K) \quad (110)$$

onde R é a transformação que leva K para K' . Embora diferentes regras para a soma dos blocos de spin levem a diferentes grupos de renormalização, todos eles são, em princípio, legítimos. A dificuldade está em encontrar a relação de transformação. O método de Kadanoff não nos diz como fazê-lo.

Pontos fixos e linearização da renormalização no espaço real

As transformações R não dependem de qual interação estamos considerando, ou seja,

$$K^{(n+1)} = R(K^{(n)}) \quad (111)$$

Um ponto fixo K^* do mapa R é definido por

$$K^* = R(K^*) \quad (112)$$

Assumimos que $K^{(n)}$ atinge o ponto fixo na medida que $n \rightarrow \infty$. O hamiltoniano \mathcal{H}^* , correspondente a K^* , é chamado de hamiltoniano do ponto fixo. Esse ponto fixo é o que estamos interessados uma vez que nele o sistema é invariante para uma mudança de escala. Ou seja, a função de correlação é 0 ou ∞ . O primeiro caso corresponde a um sistema não interagente ou a $T = \infty$. O caso que nos interessa é o segundo.

Vamos analisar o comportamento do sistema próximo do ponto fixo, que assumimos ser um

ponto crítico. Os diversos valores de K' formam um espaço de constantes. A transformação entre dois pontos define um *fluxo dinâmico discreto* nesse espaço. Para nossa análise, faremos uma aproximação linear para a variação das transformações nesse espaço. Próximos do ponto crítico, escrevemos então,

$$\delta K' = K^{(n+1)} - K^* = R(K^n) - K^* \quad (113)$$

e temos

$$\delta K' = R(K^*) + \bar{T}(K^{(n)} - K^*) \quad (114)$$

ou,

$$\delta K'_\alpha = \sum_\beta \bar{T}_{\alpha\beta}(K^*) \delta K_\beta \quad (115)$$

e

$$\bar{T}_{\alpha\beta} = \left. \frac{\partial R_\alpha(K)}{\partial K_\beta} \right|_{K=K^*} \quad (116)$$

A matriz \bar{T} não é necessariamente simétrica. Assumiremos que ela possui autovalores não-degenerados o que garante que os autovetores da direita e da esquerda formam uma base. Vamos expandir δK_α na base dos autovetores a direita,

$$\bar{T}\vec{\varphi} = \lambda\vec{\varphi} \quad (117)$$

ou,

$$\sum_\beta \bar{T}_{\alpha\beta} \varphi_\beta^i = \lambda_i \varphi_\alpha^i \quad (118)$$

Temos então,

$$\begin{aligned}
\delta K_\alpha &= (K^{(n)} - K^*) = \sum_i \varphi_\alpha^i v_i \\
\delta K'_\alpha &= (K^{(n+1)} - K^*) = \sum_i \varphi_\alpha^i v'_i
\end{aligned} \tag{119}$$

Os autovetores a esquerda são definidos na forma

$$\sum_\alpha \phi_\alpha^i \bar{T}_{\alpha\beta} = \lambda_j \phi_\beta^i \tag{120}$$

Utilizando a propriedade

$$\bar{\varphi} \cdot \bar{\phi} = \bar{\phi} \cdot \bar{\varphi} = \bar{1} \tag{121}$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_{i\alpha} &= \phi_\alpha^i \\
\bar{\varphi}_{\alpha i} &= \varphi_\alpha^i
\end{aligned} \tag{122}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
v_i &= \sum_\alpha \phi_\alpha^i \delta K_\alpha \\
v'_i &= \sum_\alpha \phi_\alpha^i \delta K'_\alpha
\end{aligned} \tag{123}$$

Combinando com as eqs. 109 e 119, temos

$$v'_i = \lambda_i v_i \tag{124}$$

Os v'_i s são chamados de *campos de escala* e estão associados com a transformação do grupo de

renormalização próximo do ponto crítico. Os v_i 's formam um conjunto de coordenadas curvilíneas para o ponto fixo. Partindo do hamiltoniano inicial, podemos escrever

$$v_i(K^{(n)}) = \lambda_i^n v_i(K) \quad (125)$$

A figura 4 esquematiza um espaço bidimensional de parâmetros com suas coordenadas curvilíneas em torno de um ponto fixo. Podemos classificar os campos de escala v_i pelos seus autovalores:

1. **Relevantes** se $|\lambda_i| > 1$. Esses campos tem que ser considerados uma vez que para um valor não nulo eles aumentam de intensidade a cada transformação. Para estar no ponto fixo eles têm que estar com valor zero.
2. **Irrelevantes** se $|\lambda_i| < 1$. Nesse caso, o campo diminui a cada transformação, eventualmente $v_i \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. Próximo do ponto crítico o sistema comporta-se como se esse campo não existisse e pode ser desprezado desde o início.
3. **Marginal** se $|\lambda_i| = 1$. Esse caso depende dos detalhes do sistema e exigem uma análise diferenciada.

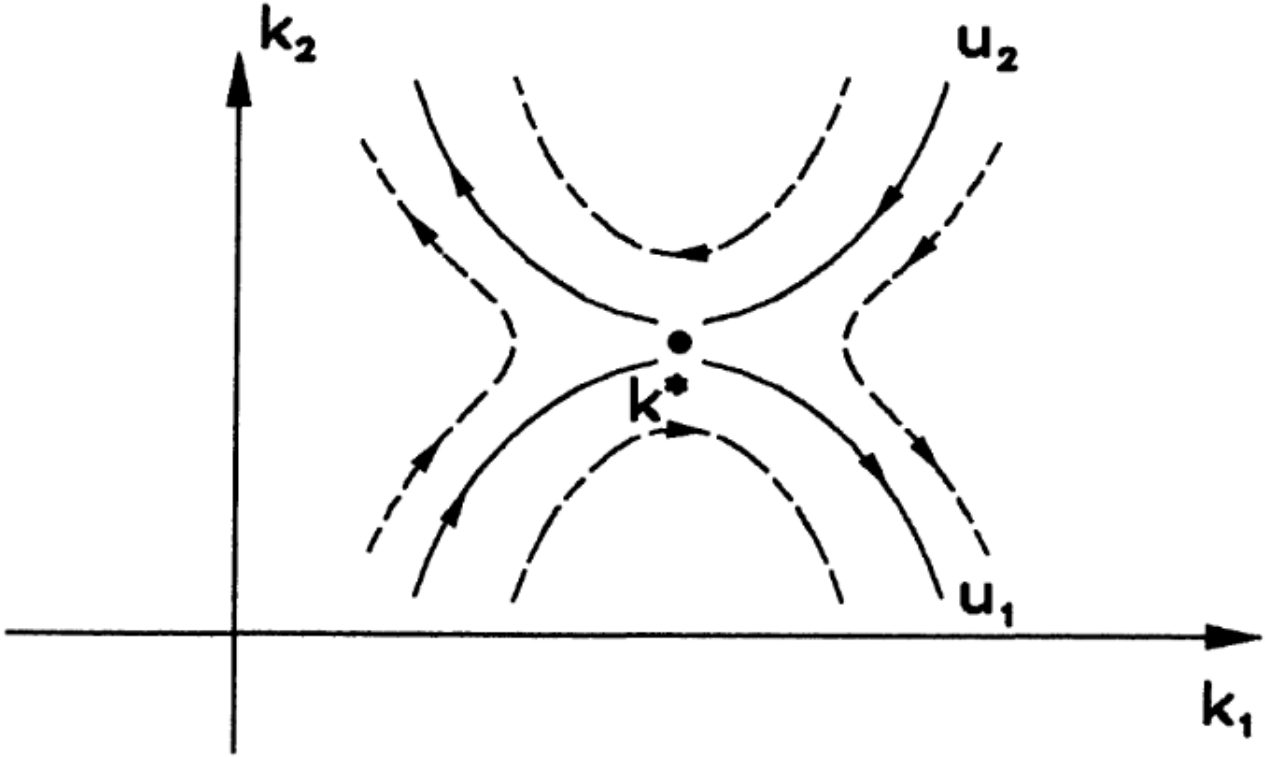


Figure 4: Ponto fixo (hiperbólico) para um espaço de parâmetros bidimensional adaptado para as coordenadas e os fluxos. Extraído da ref. 4.

Se todos os campos de escala são relevantes o ponto fixo K^* é *um nó instável*. Se todos os campos de escala são irrelevantes, ele é *um nó estável*. Finalmente, se temos os dois tipos de campos de escala, relevantes e irrelevantes, o ponto fixo é *um ponto de sela* ou *hiperbólico*. Vamos considerar esse caso. Consideremos um sistema com n campos de escala, sendo m relevantes:

$$|\lambda_1|, \dots, |\lambda_m| > 1; |\lambda_i| \leq 1, i > m \quad (126)$$

A condição

$$v_1 = \dots = v_m = 0 \quad (127)$$

determina uma hipersuperfície no espaço de parâmetros com dimensão $n - m$. Todos os pontos

na superfície levam a K^* enquanto que os pontos que não estão na superfície inicialmente levam a K^* mas a medida que se aproximam desse afastam-se, na medida que o número de interações aumentam. A figura 5 exemplifica a situação. A superfície é chamada de *variedade de atração* (*attraction manifold*) ou *superfície crítica* associada ao ponto fixo K^* .

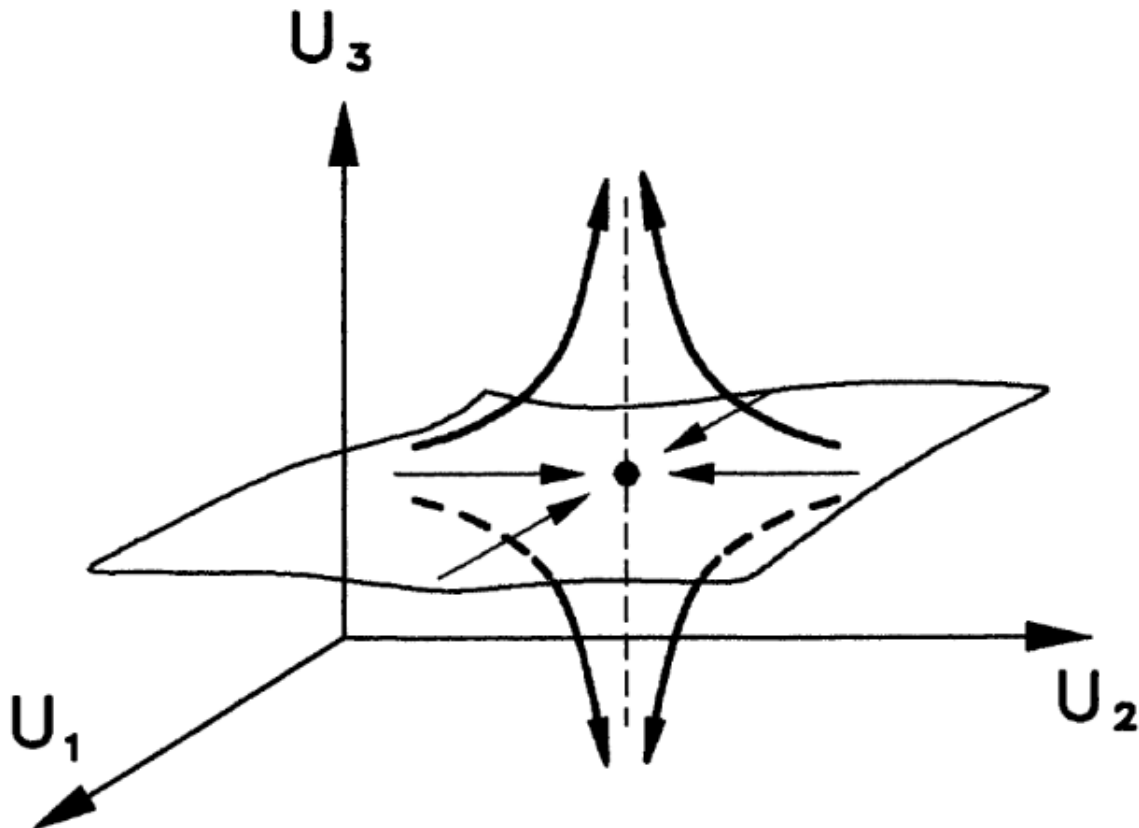


Figure 5: Superfície crítica de um ponto fixo hiperbólico com três campos de escala e $m = 1$. Extraído da ref. 4.

Vamos retornar agora a equação de recorrência 108 e utilizarmos os campos de escala como coordenadas locais na vizinhança de K^* :

$$g(v_1, v_2, \dots) = \mu(v_1, v_2, \dots) + b^{-d}g(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots) \quad (128)$$

Essa é uma equação linear não-homogênea. Sua solução geral é formada por uma solução particular mais uma solução geral da equação homogênea correspondente,

$$g(v_1, v_2, \dots) = b^{-d}g(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots) \quad (129)$$

Vamos assumir que $\mu(v_1, v_2, \dots)$ seja uma função regular (analítica) dos campos de escala em torno da origem. Pode-se mostrar nesse caso (ver ref. 5) uma solução particular regular $g_{reg}(v_1, v_2, \dots)$ pode ser obtida pela iteração de μ apenas. Podemos escrever então

$$g(v_1, v_2, \dots) = g_{reg}(v_1, v_2, \dots) + b^{-d}g_{sing}(v_1, v_2, \dots) \quad (130)$$

onde g_{sing} é a parte da solução que apresenta um comportamento não-analítico em torno do ponto crítico e é obtida pela equação 129.

Pontos fixos, expoentes críticos e universalidade

O processo de renormalizarmos os sítios para blocos cada vez maiores tem o efeito de diminuir o comprimento de correlação, ξ . Exceto para o caso trivial, $\xi = 0$, um ponto fixo só é compatível com $\xi = \infty$. Todos os pontos na superfície crítica levam a K^* por meio de transformações de grupo de renormalização. Ou seja, *todos os pontos em uma superfície crítica devem ser críticos, isto é, ter $\xi = \infty$* . Podemos agora entender o significado de **classe de universalidade**: toda superfície crítica ou melhor todos os sistemas físicos que formam a mesma superfície crítica definem uma classe de universalidade dos sistemas críticos. Todos os sistemas físicos na superfície crítica serão direcionados para o mesmo ponto fixo K^* sob o efeito de operações de grupo de renormalização, ou seja, eles apresentarão o mesmo comportamento crítico. A diferença entre os sistemas físicos estabelece-se nos campos de escala irrelevantes, os quais não têm influência no comportamento crítico.

Vamos voltar para o nosso exemplo do modelo de Ising. Sabemos que para $t \neq 0$ o comprimento de correlação

e finito, o mesmo para $h \neq 0$. Portanto, $t = h = 0$ devem estar entre as condições que definem a superfície crítica, ou seja, t e h devem estar associados a campos de escala relevantes. Podemos

fazer a associação $t \rightarrow 0 \Leftrightarrow v_1 \rightarrow 0$ e $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow v_2 \rightarrow 0$. Vamos escrever os autovalores respectivos na forma

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= b^{D_t} \\ \lambda_2 &= b^{D_h}\end{aligned}\tag{131}$$

onde $D_t, D_h > 0$ para os campos relevantes e $b > 1$. A equação 129 tem a forma

$$g_{sing}(v_1, v_2) = b^{-d} g_{sing}(b^{D_t} v_1, b^{D_h} v_2)\tag{132}$$

Recuperamos de uma forma mais quantitativa o resultado do escalonamento de Widom. Com a diferença significativa que agora podemos calcular esses valores:

$$\begin{aligned}D_t &= \frac{\ln \lambda_1}{\ln b} \\ D_h &= \frac{\ln \lambda_2}{\ln b}\end{aligned}\tag{133}$$

Podemos ir mais longe ainda. Vamos chamar de v_t o campo de escala associado com a temperatura. Temos então, utilizando os autovetores a esquerda de \bar{T} ,

$$v_t = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}^t (K_{\alpha} - K_{\alpha}^*)\tag{134}$$

Escrevendo explicitamente $K_{\alpha} = J_{\alpha}/k_B T$, a temperatura crítica $T_c = T_c(\{J_{\alpha}\})$ pode ser determinada com a condição $v_t = 0$, ou seja,

$$T_c(\{J_{\alpha}\}) = \frac{\sum_{\alpha} \phi_{\alpha}^t J_{\alpha}}{\sum_{\alpha} \phi_{\alpha}^t K_{\alpha}^*}\tag{135}$$

2.3 Aplicação: modelo de Ising em uma dimensão

Vamos considerar um exemplo simples, que tem solução exata, para entendermos melhor as idéias discutidas acima. Por falta de tempo, não vamos detalhar muito o resultado. Para uma versão pedagógica, sugerimos a ref. 6. Aqui, vamos seguir resumidamente os passos do CL, na ausência de um campo externo.

Solução exata O hamiltoniano de Ising em uma dimensão e na ausência de campo externo pode ser escrito de forma geral

$$\begin{aligned}
 -\bar{\mathcal{H}} &= -\frac{\mathcal{H}}{T} = K \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} + L \sum_i \sigma_i + \sum_i C \\
 &= K \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{1}{2} L \sum_i (\sigma_i + \sigma_{i+1}) + \sum_i C \\
 &= \sum_i \bar{K}(\sigma_i, \sigma_{i+1})
 \end{aligned} \tag{136}$$

onde $K = J/T$ e $L = h/T$, sendo que J é a integral de troca e h é o campo magnético externo. C é uma constante que define o zero de energia.

Para calcularmos a função de partição utilizamos matrizes de transferência. Vemos que podemos escrever a expoentencia de $\bar{K}(\sigma, \sigma')$ na forma

$$e^{\bar{K}(\sigma, \sigma')} = e^C \begin{bmatrix} e^{K+L} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K+L} \end{bmatrix} \equiv \bar{M}(K, L, C) \tag{137}$$

Quanto $h = 0$ e $C = 0$, temos

$$\bar{M}(K, 0, 0) = \cosh K (1 + \sigma \sigma' \tanh K) \tag{138}$$

Para calcular a função de partição vamos utilizar condições de contorno periódicas. Com isso, podemos escrever

$$Z_N = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_N} e^{-\tilde{H}} = \text{Tr} \bar{M}^N = e^{NC} (\lambda_+^N + \lambda_-^N) \quad (139)$$

onde λ_{\pm} são autovalores de $\bar{M}(K, L, 0)$,

$$\lambda_{\pm} = e^K \cosh L \pm (e^{2K} \sinh^2 L + e^{-2K})^{1/2} \quad (140)$$

Na ausência de campo, $h = 0$, o autovalor maior é $\lambda_+ = 2 \cosh K$. No limite de N grande, λ_-^N pode ser desprezado e a energia livre por spin é

$$\begin{aligned} \frac{f}{T} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} [-Z_N] \\ &= -C - \ln[e^K \cosh L + (e^{2K} \sinh^2 L + e^{-2K})^{1/2}] \end{aligned} \quad (141)$$

e, para $T(K \rightarrow \infty)$ pequeno e $h(L \rightarrow 0, Le^{2K} \ll 1)$ pequeno, temos

$$f - f_0 \rightarrow -Te^{-2K} - \frac{1}{2}e^{2K} \left(\frac{h^2}{T} \right) \quad (142)$$

onde

$$f_0 = -J - TC \quad (143)$$

A energia por spin do estado fundamental é J quando $C = 0$ e temos um gap no espectro de excitação com uma dependência exponencial com a temperatura no estado fundamental. A susceptibilidade a baixas temperaturas é

$$\chi = -\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} = \frac{1}{T} e^{2K} \quad (144)$$

Temos a divergência de χ para $T \rightarrow 0$, o que indica que há um ponto crítico em $T = 0$ no modelo de Ising em uma dimensão. Esse resultado era esperado qualitativamente uma vez que

em uma dimensão não deveríamos esperar uma transição para fase ordenada para temperaturas não nulas. A fase a $T = 0$ é com os spins totalmente ordenados enquanto que a $T \neq 0$, os spins aparecem desordenados.

Renormalização Vamos proceder agora com o processo de renormalização de Kadanoff. Para isso, vamos reescrever a rede em blocos de $b - 1$ spins, deixando um spin em cada sítio como na figura . A função de partição da nova rede é igual a da rede original e pode ser escrita na forma

$$Z_N(K, L, C) = \text{Tr} \bar{M}^N = \text{Tr} [\bar{M}^b]^{N'} = Z_{N'}(K', L', C') \quad (145)$$

onde $N' = N/b$ é o número de sítios da nova rede. Os potenciais da rede decimada podem ser determinados por

$$\bar{M}(K', L', C') = \bar{M}^b(K, L, C) \quad (146)$$

Quando $L = 0$, temos

$$\begin{aligned} \tanh K' &= (\tanh K)^b \\ \Rightarrow K' &= \tanh^{-1}[(\tanh K)^b] \end{aligned} \quad (147)$$

Essa equação é a *relação de recursão do grupo de renormalização*. Ela pode ser iterada um certo número de vezes e, no infinito, K chega a um *ponto fixo* K^* , tal que $K' = K = K^*$. Nesse caso temos apenas dois pontos fixos:

$$\begin{aligned} \tanh K &= 0 \quad (K = \infty) \\ \tanh K &= 1 \quad (K = 0) \end{aligned} \quad (148)$$

$\tanh K$ diminui a cada iteração aproximando-se do ponto fixo $\tanh K = 0$ na medida que o número de interações tendem ao infinito. Se $K = \infty$, $\tanh K$ permanece com valor unitário qualquer número de iterações. Como todos os valores de K outros que não seja $K = \infty$ tendem a $K = 0$, dizemos que o ponto fixo $\tanh K = 0 (T = \infty)$ é *estável*. O ponto fixo em $K = \infty$ é *instável*, uma vez que os pontos de atração para esse valor é apenas o próprio ponto $K = \infty$. A figura resume essa descrição.

O ponto fixo estável descreve o comportamento para todas as temperaturas finitas. Ele está associado a fase paramagnética. O ponto instável descreve a transição de fase em $T = 0$.

O comprimento de correlação é

$$\xi' = \xi/b \tag{149}$$

ou seja, o comprimento de correlação medido no parâmetro de rede da nova rede é b^{-1} vezes o comprimento de correlação medido na rede original. O comprimento de correlação diminui na medida que ele é reescalonado. Temos apenas dois pontos fixos: $\xi = 0$ e $\xi = \infty$. O segundo caso corresponde ao ponto crítico enquanto que o primeiro corresponde a temperaturas altas não críticas.

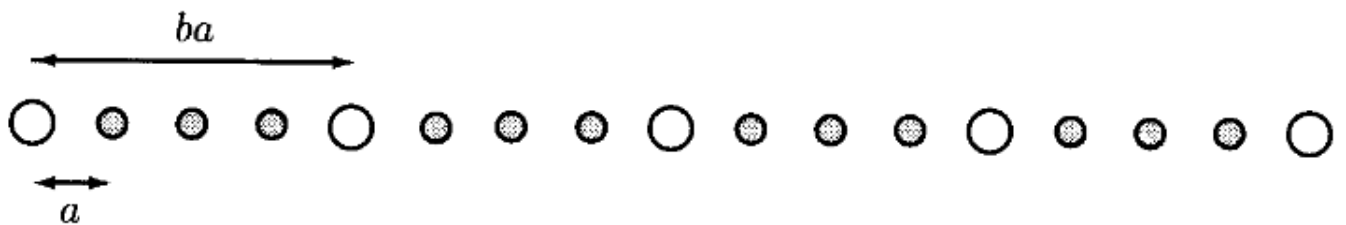


Figure 6: Esquema de decimação de uma cadeia de Ising unidimensional. Extraído de CL.

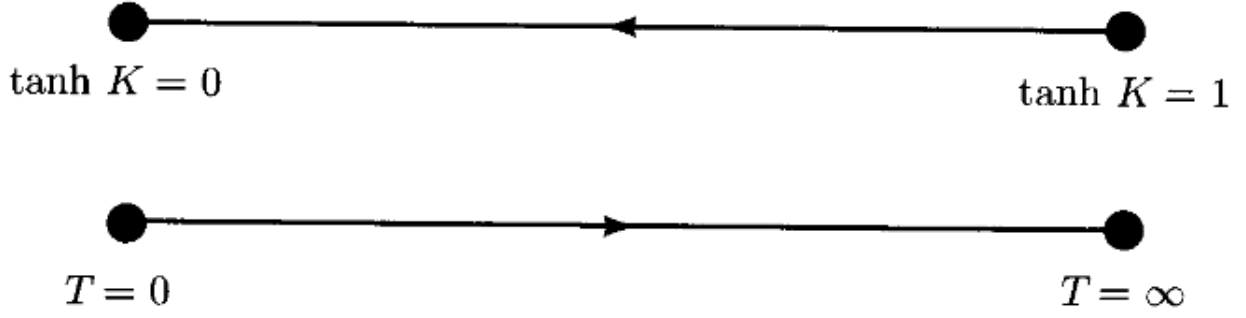


Figure 7: Fluxo do grupo de renormalização para $\tanh K$ e T , mostrando os pontos fixos estável em $\tanh K = 0$ ($T = \infty$) e instável em $\tanh K = 1$ ($T = 0$). Extraído de CL.

References

- [1] Chaikin e Lubenski, **Condensed Matter Physics**, Oxford, 1995.
- [2] Kerson Huang, **Statistical Mechanics**, 2a. ed. John Wiley & Sons, 1987.
- [3] Edouard Brézin, **Introduction to Statistical Field Theory**, Cambridge, 2010.
- [4] G. Morandi, F. Napoli e E. Ercolessi, **Statistical Mechanics: An Intermediate Course**, 2a. ed., World Scientific, 2001.
- [5] Th. Niemeijer a J.M.J. van Leeuwen, em **Phase Transitions and Critical Phenomena**, vol. 6, pp. 425-505, C. Domb e M.S. Green, eds., Academic Press, 1976.
- [6] H.J. Maris e L.P. Kadanoff, “Teaching the renormalization group”, *Am. J. Phys.* **46**, 652 (1978).