

Part VI

Transições de fase quânticas

Essas notas estão baseadas no livro do Sachdev (ref. 1) (primeiros capítulos), no artigo de revisão do Sondhi et al. (ref. 2), no artigo de revisão de Vojta (ref. 3), no livro (não publicado) do Batrouni e Scalettar (ref. 4) e outras referências que serão citadas nas notas.

1 O que é transição de fase quântica?

O curso até agora considerou a matéria condensada cujas fases são determinadas por transições de fase térmicas ou clássicas. Essencialmente, isso quer dizer que as flutuações térmicas, características do sistema, determinam a transição de fase na medida que a temperatura T aproxima-se da temperatura crítica T_c . Essas fases foram extensivamente discutidas ao longo do curso e elas podem ser tratadas dentro de uma descrição macroscópica clássica com razoável sucesso. Na medida que a temperatura diminui, as flutuações térmicas tendem a zero com $T \rightarrow 0$. No limite de $T = 0$, não temos mais flutuações térmicas mas ainda temos flutuações, as quais agora têm origem quântica devido ao princípio de incerteza de Heisenberg. Essas flutuações podem levar a uma transição de fase ou a destruição da ordem em um sistema ordenado. Nesse caso, a $T = 0 K$, a transição entre uma fase e outra é governada por um outro parâmetro, não-térmico g , o qual pode ser a pressão, concentração, campo magnético, etc. Embora possa parecer que o problema seja específico, do domínio da física de temperaturas muito baixas (afinal, $T = 0 K$ não é possível, rigorosamente), resultados experimentais e teóricos mostraram que a existência de pontos críticos quânticos (isto é, valores de g_c para o qual ocorre uma transição de fase a $T = 0$, que denominaremos de QCP - “quantum critical point”), quando existentes, afeta o comportamento do sistema condensado a temperaturas finitas. Alguns dos materiais que têm comportamento de transição de fase quântica são os isolantes magnéticos de terras-raras, férmions pesados, supercondutores de alta temperatura, gases de elétrons bidimensionais (efeito Hall quântico). Nesse capítulo final do curso vamos apenas

introduzir o tema, sem ir além de uma descrição qualitativa de alguns aspectos importantes desse campo da matéria condensada. Entre esses aspectos, discutiremos o escalonamento nas transições de fase quântica, o mapeamento das transições quânticas nas transições clássicas e, como exemplo, o modelo do hamiltoniano de Ising na presença de um campo transversal. Vários artigos de revisão existem para introduzir o tema (refs. 2-4), em diferentes níveis, e, em particular, o livro de Sachdev (ref. 1) permite um estudo mais avançado. Essas notas baseiam-se nos primeiros capítulos dessas referências. Nós nos limitaremos a discussão das transições de fase quânticas contínuas.

2 Descrição da transição de fase quântica

Vamos partir de um Hamiltoniano $\mathcal{H}(g)$, onde os graus de liberdade estão nos sítios da rede, e varia em função de um acoplamento sem dimensões, g . Consideremos agora o estado fundamental desse hamiltoniano, o qual depende de g . No caso de uma rede finita, o estado fundamental de energia será uma função analítica suave de g . Consideremos agora o caso em que g acopla grandezas que se conservam, isto é, o hamiltoniano pode ser escrito na forma

$$\mathcal{H}(g) = \mathcal{H}_0 + g\mathcal{H}_1$$

onde

$$[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1] = 0$$

Nesse caso, \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 podem ser diagonalizados simultaneamente. As autofunções são independentes de g , mesmo que os autovalores dependam de g . Temos então um cruzamento de níveis onde o estado excitado torna-se o estado fundamental em $g = g_c$, dando origem a um ponto de não-analiticidade no estado fundamental de energia. Essa situação está ilustrada na fig. 1. Consideremos agora a situação onde temos um anticruzamento entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado no caso de uma rede finita. Na medida que a rede aumenta, indo para uma rede

infinita. o anticruzamento pode diminuir, até ficar não-analítico em $g = g_c$, no limite da rede infinita. Definimos como transição de fase quântica todo ponto de não-analiticidade no estado fundamental de energia de um sistema em uma rede inifinita . Esse ponto de não-analiticidade pode ser o limite da rede infinita de um anticruzamento ou um cruzamento real. O primeiro caso é o mais frequente.

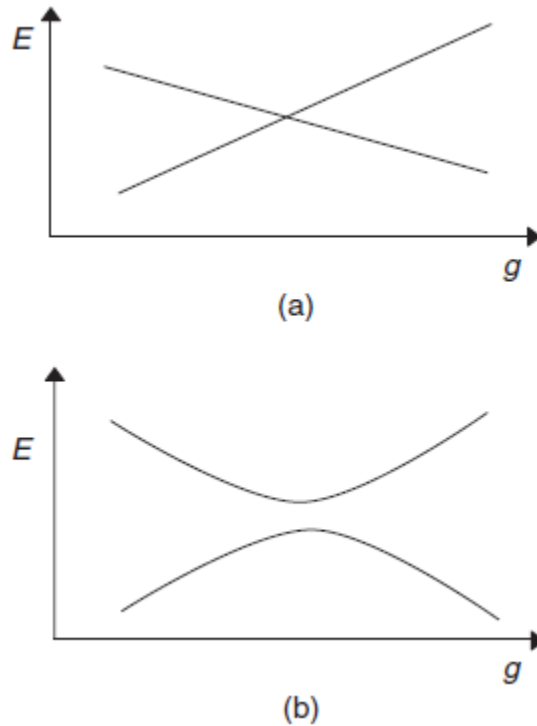


Figure 1: Representação esquemática dos níveis de baixa energia do hamiltoniano $\mathcal{H}(g)$ para uma rede finita em função de um acoplamento sem dimensão g . No caso de $\mathcal{H}(g) = \mathcal{H}_0 + g\mathcal{H}_1$, onde \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 comutam e são independentes de g podemos ter um cruzamento de níveis como em (a). A situação mais frequente é o anticruzamento apresentado em (b). Figura extraída da ref. 1.

Vamos nos limitar na nossa descrição a classe de transição de fase quântica de segunda ordem ou contínuas. Essas são aquelas onde a escala de energia característica das flutuações acima do estado fundamental desaparece quando g aproxima-se de g_c . Seja Δ a energia do estado excitado de mais baixa energia, assumindo que o sistema tenha um gap. Se no limite da rede infinita essas excitações do sistema tendem a valores arbitrariamente pequenos, Δ é a escala na qual há uma mudança qualitativa na natureza do espectro de frequências. Em geral, encontramos a relação

$$\Delta \sim J |g - g_c|^{z\nu}$$

J é a escala de energia característica do acoplamento microscópico e $z\nu$ expoente crítico, o qual pode ser universal. Voltaremos a esses expoentes mais adiante.

3 Revisão dos conceitos básicos das transições de fase

Vamos revisar os conceitos de transição de fase clássica que discutimos anteriormente.

Acima da temperatura crítica, a média termodinâmica do parâmetro de ordem é nula. No entanto, sua correlação não é nula. Em particular, na medida que nos aproximamos do ponto (temperatura) crítica, a correlação espacial das flutuações do parâmetro de ordem tornam-se de longo alcance. Próximo do ponto crítico, o comprimento de correlação ξ é a escala de comprimento típica do sistema e diverge como

$$\xi \propto |t|^{-\nu}$$

Além da correlação espacial de longo alcance, temos uma correlação de longo alcance no parâmetro de ordem das flutuações no tempo. Tipicamente, a escala de tempo do decaimento das flutuações é a correlação τ_c . No ponto crítico, ela diverge como

$$\tau_c \propto \xi^z \propto |t|^{-\nu z}$$

onde z é o *expoente crítico dinâmico*. Próximo do ponto crítico, a única escala característica (significativa) de comprimento é ξ e de tempo é τ_c . No ponto de transição de fase, o comprimento e o tempo de correlação são infinitos, as flutuações ocorrem em todas as escalas de comprimento e tempo e o sistema é invariante em escala. O conjunto de expoentes críticos caracterizam comple-

tamente o comportamento crítico na transição de fase.

Isso não significa que o sistema físico não é quântico. Sistemas com forte domínio da mecânica quântica, como hélio superfluido, também operam dessa forma. A mecânica quântica, em geral, é responsável pela existência do parâmetro de ordem, dentro de uma descrição microscópica. No ponto crítico, as flutuações quânticas são importantes na escala microscópica mas não para grandes comprimentos de onda que governam a transição de fase. Resumindo: as transições de fase em geral possuem um comprimento de correlação e um tempo de correlação que divergem. O parâmetro de ordem flutua coerentemente em distâncias cada vez maiores e cada vez mais lentamente. Isso significa que a frequência associada com as flutuações críticas tende a desaparecer. Se todas as frequências de interesse, próximo do ponto crítico, são tais que $\hbar\omega \ll k_B T$, então as flutuações críticas terão um comportamento clássico.

Vamos considerar um dos exemplos que discutimos exaustivamente, o ferromagnético clássico. Nesse caso, o parâmetro de ordem é $m(\vec{r})$. Os parâmetros externos são a temperatura reduzida, $t = |T - T_c|/T_c$ e o campo magnético externo, H , conjugado do parâmetro de ordem. Próximo do ponto crítico, a única escala de comprimento significativa é o comprimento de correlação. Portanto, as propriedades físicas não devem se alterar se nós reescalamos todos os comprimentos do sistema físico por um fator comum e ao mesmo tempo ajustamos os parâmetros externos de maneira que o comprimento de correlação tenha o mesmo valor. Isso produz a relação de homogeneidade que discutimos anteriormente para a parte singular da densidade de energia livre,

$$f(t, H) = b^{-d} f(tb^{1/\nu}, Bb^{y_B})$$

Aqui, y_B é um outro expoente crítico, associado ao campo magnético externo. O fator de escala b é um número positivo arbitrário. As outras grandezas físicas, que podem ser derivadas da densidade de energia livre, possuem também expoentes críticos. A tabela resume esses coeficientes. As relações de escala

$$2 - \alpha = 2\beta + \gamma$$

$$2 - \alpha = \beta(\delta + 1)$$

e a relação de hiper-escala

$$2 - \alpha = d\nu$$

$$\gamma = (2 - \eta)\nu$$

relacionam os diversos coeficientes entre si.

Estática e dinâmica são desacopladas na física estatística clássica. Com isso, o expoente dinâmico z é completamente independente de todos os outros.

Reforçamos ainda o conceito de universalidade. Os expoentes críticos dependem apenas das simetrias do parâmetro de ordem e da dimensionalidade do espaço do sistema físico. Eles são idênticos para diferentes sistemas físicos que pertencem a mesma classe de universalidade, ou seja, tem as mesmas características (simetrias e dimensionalidade). O ponto fundamental é o comprimento de correlação que diverge. No ponto crítico, o sistema faz uma média sobre grandes volumes tornando os detalhes microscópicos irrelevantes.

	Exponent	Definition	Conditions
Specific heat	α	$C \propto t ^{-\alpha}$	$t \rightarrow 0, B = 0$
Order parameter	β	$m \propto (-t)^\beta$	$t \rightarrow 0$ from below, $B = 0$
Susceptibility	γ	$\chi \propto t ^{-\gamma}$	$t \rightarrow 0, B = 0$
Critical isotherm	δ	$B \propto m ^\delta \text{sign}(m)$	$B \rightarrow 0, t = 0$
Correlation length	ν	$\xi \propto t ^{-\nu}$	$t \rightarrow 0, B = 0$
Correlation function	η	$G(r) \propto r ^{-d+2-\eta}$	$t = 0, B = 0$
Dynamic	z	$\tau_c \propto \xi^z$	$t \rightarrow 0, B = 0$

Table 1: Expoentes críticos para magnetos, com parâmetro de ordem $\vec{m}(\vec{r})$, tendo o campo magnético \vec{H} como campo conjugado. O expoente crítico y_B relaciona-se com δ por meio da relação $y_B = d\delta/(1 + \delta)$. Extraído da ref. .3

4 Mecânica Estatística Quântica

Consideremos a função de partição do sistema descrito pelo hamiltoniano \mathcal{H} .

$$Z(\beta) = \text{Tr} E^{-\beta\mathcal{H}}$$

Os valores esperados de um operador \hat{A} são

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr}[\hat{A}e^{-\beta\mathcal{H}}]$$

Em geral, podemos escrever

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{cin} + \mathcal{H}_{pot}$$

Em um sistema clássico, a parte cinética e a parte potencial do hamiltoniano comutam. Dessa forma, podemos escrever

$$Z = Z_{cin}Z_{pot}$$

ou seja, em um sistema clássico *a estática e a dinâmica estão desacopladas*. A parte cinética para a energia livre em geral não possui singularidades, derivando do produto de integrais gaussianas. As transições de fase clássicas podem ser estudadas por meio de teorias efetivas independentes do tempo, na dimensão d que as descrevem.

O operador matriz densidade $e^{-\beta\mathcal{H}}$ tem a mesma estrutura que o operador de evolução no tempo, $e^{-i\mathcal{T}\mathcal{H}/\hbar}$, onde definimos o tempo imaginário $\mathcal{T} = -i\hbar\beta$, que é o intervalo de tempo no qual o sistema evolui. Utilizando um conjunto completo de estados $|n\rangle$, podemos escrever

$$Z(\beta) = \sum_n \langle n | e^{-\beta\mathcal{H}} | n \rangle$$

Z é agora a soma de amplitudes de transições no tempo imaginário, onde o sistema inicia em um estado $|n\rangle$ e volta para o mesmo estado, após um intervalo de tempo imaginário igual a $-i\hbar\beta$. Resumindo, *calcular a termodinâmica de um sistema quântico é o mesmo que calcular amplitudes de transição para a evolução no tempo imaginário, com o intervalo total e tempo fixado pela temperatura de interesse*. Nesse processo, temos portanto, a dinâmica quântica e a evolução temporal envolvidas.

Utilizamos agora a descrição por meio de integrais de caminho de Feynman. A amplitude de transição entre dois estados é calculada somando as amplitudes sobre todos os caminhos possíveis entre eles. O caminho escolhido pelo sistema é definido especificando o estado do sistema em uma sequência de passos intermediários no tempo espaçados finamente. Escrevemos então

$$e^{-\beta\mathcal{H}} = [e^{-(1/\hbar)\delta\tau\mathcal{H}}]^N$$

onde $\delta\tau$ é real e o intervalo de tempo imaginário pequeno que ele representa é $-i\delta\tau$. $\delta\tau$ é pequeno na escala de interesse, ou seja, $\delta\tau = \hbar/\Gamma$, onde Γ é um *cutoff* ultravioleta. N é grande e definido por

$$N\delta\tau = \hbar\beta$$

Utilizando uma base completa, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \sum_n \sum_{m_1, \dots, m_N} \langle n | e^{-(1/\hbar)\delta\tau\mathcal{H}} | m_1 \rangle \\
 &\times \langle m_2 | e^{-(1/\hbar)\delta\tau\mathcal{H}} | m_1 \rangle \langle m_2 | \dots | m_N \rangle \\
 &\times \langle m_N | e^{-(1/\hbar)\delta\tau\mathcal{H}} | n \rangle
 \end{aligned}$$

A interpretação dessa expressão pode ser feita identificando a função de partição quântica com a função de partição clássica, onde a soma sobre configurações está expressa em termos da matriz de transferência se considerarmos o tempo imaginário como uma dimensão espacial a mais. Se o sistema quântico tem dimensão d , então a função de partição tem a forma de uma função de partição clássica para um sistema com dimensão $d + 1$. A dimensão extra é finita, ou seja, $\hbar\beta$. No limite $T \rightarrow 0$, a direção diverge e temos uma dimensão efetiva $d + 1$ na equivalência clássica.

4.1 Exemplo prático: cadeia unidimensional de junções Josephson

Vamos considerar um exemplo prático para entendermos melhor a questão de dimensionalidade. Consideramos um sistema físico composto por uma cadeia grande com um número L de junções Josephson idênticas, como ilustrado na fig. . Esse problema está discutido na ref. 2 e foi experimentalmente testado nas refs. 5-7.



Figure 2: Representação esquemática de uma cadeia unidimensional de junções Josephson. θ_i são as fases do parâmetro de ordem do supercondutor do sítio i da cadeia. Extraído da ref. 2.

Uma junção Josephson é uma junção de tunelamento conectando dois grãos supercondutores por meio de uma pequena barreira metálica (a junção pode também ser um isolante). Os pares de Cooper dos elétrons podem tunelar e voltar por tunelamento entre os grãos e, portanto, transmitir

informação sobre o estado quântico de cada grão. Quando essa transmissão é possível, temos um sistema supercondutor. No entanto, se os grãos são pequenos, temos um custo energético para carregar o grão (efeito de bloqueio de Coulomb). Se essa energia é grande o suficiente, não temos o tunelamento e o sistema torna-se um isolante. O hamiltoniano do sistema é

$$\mathcal{H} = \frac{C}{2} \sum_j V_j^2 - E_j \cos(\hat{\theta}_j - \hat{\theta}_{j+1})$$

$\hat{\theta}_j$ é o operador representando a fase do parâmetro de ordem supercondutora do j -ésimo grão. V_j é a voltagem na j -ésima junção e é conjugada a fase e se expressa na forma

$$V_j \equiv -i \frac{2e}{C} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

E_j é a energia de acoplamento Josephson. Os dois termos do hamiltoniano representam a energia de carregamento de cada grão e o acoplamento Josephson da fase na junção entre os grãos.

Os graus de liberdade do sistema são as fases dos grãos, que descrevem o parâmetro de ordem supercondutora dos elementos metálicos conectados pelas junções e as suas variáveis conjugadas que são as cargas (excesso de pares de Cooper ou, equivalentemente, as voltagens). Os estados intermediários são definidos especificando os ângulos das fases:

$$\{\theta(\tau_j)\} \equiv [\theta_1(\tau_j), \dots, \theta_L(\tau_j)]$$

onde $\theta_i(\tau_j)$ é o ângulo da fase do i -ésimo grão no tempo τ_j . A figura mostra dois caminhos típicos no intervalo $[0, \hbar\beta]$. A orientação das flechas indica o ângulo da fase local do parâmetro de ordem. O peso estatístico de cada caminho é dado pelo produto dos elementos de matriz

$$\prod_j \langle \{\theta(\tau_{j+1})\} | e^{-(1/\hbar)\delta\tau\mathcal{H}} | \{\theta(\tau_j)\} \rangle$$

Vamos mapear agora o problema de mecânica estatística quântica em um problema de mecânica

estatística clássica. Para isso identificamos o peso estatístico do caminho no espaço-tempo com o peso estatístico de Boltzmann de uma configuração espacial bidimensional de um sistema clássico. Nesse caso, o sistema clássico é um modelo XY bidimensional onde os graus de liberdade são os spins planares, especificados pelos ângulos θ_i , na rede quadrada bidimensional. Para temperaturas acima de zero a rede tem largura finita na direção temporal definida por $\hbar\beta/\delta\tau$. Um cálculo elaborado, cujos detalhes encontram-se na referência 5, mostram que podemos escrever

$$\prod_j \langle \{\theta(\tau_{j+1})\} | e^{-(1/\hbar)\delta\tau\mathcal{H}} | \{\theta(\tau_j)\} \rangle \rightarrow e^{-\mathcal{H}_{XY}} \quad (1)$$

onde

$$\mathcal{H}_{XY} = \frac{1}{K} \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j)$$

onde a soma é realizada sobre os pontos primeiros vizinhos na rede bidimensional do espaço-tempo. A constante de acoplamento K é

$$K \sim \sqrt{\frac{E_C}{E_J}}$$

onde

$$E_C = \frac{(2e)^2}{C}$$

é a energia de carregamento capacitivo. A função de partição é obtida somando sobre todas as configurações o termo da eq. 1, onde no caso quântico significa sobre todos os caminhos possíveis e no caso clássico sobre todas as configurações possíveis $\{\theta\}$ da rede bidimensional do espaço tempo:

$$Z = \int \mathcal{D}\theta e^{-\mathcal{H}_{XY}}$$

Vamos entender um pouco mais a analogia. A constante de acoplamento não tem nenhuma

relação com a temperatura real. Ela desempenha o papel da temperatura na analogia clássica mas seu valor é determinado unicamente por relações físicas do modelo. Um valor pequeno de K favorece um ordenamento coerente das fases, isto é, os valores de θ_i e θ_j não devem diferir significativamente quando os sítios i, j estão distantes. Por outro lado, uma energia grande de carregamento - grãos pequenos - leva a um valor grande de K , favorecendo as flutuações de ponto-zero das fases e, portanto, um sistema desordenado. Os valores de θ_i são quase independentes e todos os valores são aproximadamente iguais. A indefinição da fase leva a uma carga por sítio bem definida, uma vez que são variáveis conjugadas. Temos portanto a *equivalência entre uma cadeia de dimensão- d com um modelo clássico XY de dimensão $d+1$* :

“Uma transição de fase quântica supercondutora-isolante em uma cadeia de junções Josephson unidimensional tem a mesma classe de universalidade que uma transição de fase ordem-desordem de um modelo clássico XY de dimensão $1 + 1$.”

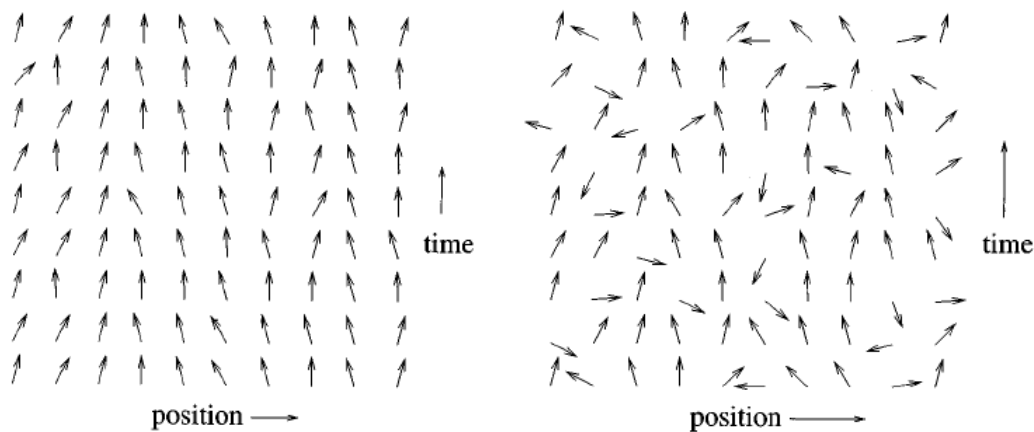


Figure 3: Dois caminhos típicos de uma cadeia 1D de junções Josephson. (Esquerda) Fase supercondutora da cadeia Josephson ou fase ordenada do modelo clássico. (Direita) Fase isolante da cadeia Josephson, onde as correlações decaem exponencialmente tanto no espaço como no tempo, correspondente a fase desordenada do modelo clássico. Extraído da ref. 2.

Vamos insistir um pouco mais na analogia do acoplamento K . Ele desempenha o papel da temperatura no equivalente clássico. No entanto, a temperatura no sistema quântico é próxima de zero e o acoplamento é uma medida das flutuações quânticas. A figura ilustra a rede espaço-tempo do modelo XY correspondente a cadeia de junções Josephson a uma certa temperatura e

a temperatura com metade desse valor. O tamanho da constante de rede na direção do tempo ($\delta\tau$) e K tem o mesmo valor em ambos os casos embora a temperatura física não seja a mesma. A diferença está que a cadeia é maior em uma direção do tempo do que no outro caso (dobro do tamanho).

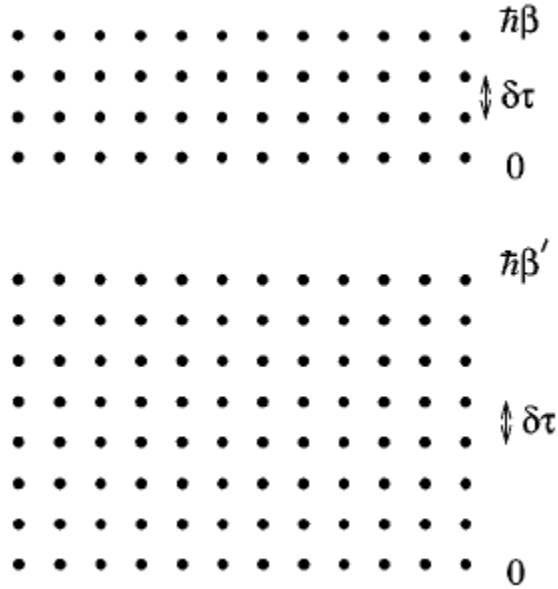


Figure 4: Redes discretas do espaço tempo com o mesmo acoplamento K . A constante de rede na direção do tempo, $\delta\tau$, é a mesma em ambos os casos embora a temperatura física é metade do valor na figura de baixo. A diferença está no tamanho da rede, determinada por $\hbar\beta = L_\tau\delta\tau$. Figura extraída da ref. 2.

Vamos considerar agora o limite de altas temperaturas, quando devemos recuperar um comportamento clássico para a rede quântica. Nesse limite, o intervalo $\hbar\beta$ é muito pequeno comparado com os períodos associados com as escalas de frequências naturais do sistema. A evolução temporal nesse caso corresponde a uma única configuração estática no tempo. A dinâmica desaparece do problema e recuperamos o peso de Boltzmann $\exp[-\beta\mathcal{H}_{cl}]$ na integral de caminho.

Vamos avançar um pouco mais na nossa analogia. Considremos um operador na representação de Heisenberg no tempo imaginário,

$$A(\tau) = e^{\mathcal{H}\tau/\hbar} A e^{-\mathcal{H}\tau/\hbar}$$

A função de correlação para qualquer operador pode ser expressa em termos de um conjunto completo de estados,

$$\begin{aligned} G(\tau) &\equiv \langle 0|A(\tau)A(0)|0\rangle \\ &= \sum_m e^{-(\epsilon_m - \epsilon_0)\tau/\hbar} |\langle 0|A|m\rangle|^2 \end{aligned}$$

onde ϵ_m é a energia do m -ésimo estado excitado de energia. A existência de um mínimo finito de excitação, ou seja, de um gap, $\Delta_{01} \equiv \epsilon_1 - \epsilon_0$, garante que para tempos imaginários longos a função de correlação decai exponencialmente,

$$G(\tau) \sim e^{-\Delta_{01}\tau/\hbar}$$

ou seja, a existência do gap, ou seja, o sistema sendo isolante, a correlação decai exponencialmente com o tempo (imagiário).

Recuperando nossa discussão inicial sobre o escalonamento, nesse caso particular, o expoente de acoplamento dinâmico z é um. Isso nem sempre é o caso.

Como última observação dessa analogia, retomamos o desacoplamento entre estática e dinâmica no caso clássico. Na expressão de Z em termos de integral de caminho, temos informação da evolução no tempo imaginário do sistema no intervalo $[0, \hbar\beta]$. É possível obter a dinâmica no tempo real fazendo a continuação analítica

$$G(\tau) \rightarrow G(+it)$$

Para resolvermos a termodinâmica do sistema quântico precisamos resolver a dinâmica. A existência de \hbar significa que as escalas de energia que entram na termodinâmica determinam necessariamente as escalas temporais. Consideremos, por exemplo, uma escala característica de energia, o gap Δ . Pelo princípio de incerteza, temos excitações virtuais no gap na escala de

tempo \hbar/Δ , o qual aparece como escala de tempo característica para a dinâmica. Próximo do ponto crítico, Δ desaparece, e para temperaturas finitas temos que alterar a referência: a incerteza relevante na energia é agora $k_B T$ e a escala característica de tempo é $\hbar\beta$. Em ambos os casos, temos um acoplamento entre a dinâmica e a termodinâmica.

5 Mecânica quântica na vizinhança do ponto crítico

Vamos discutir agora o papel das flutuações quânticas e clássicas na proximidade do ponto crítico da transição de fase quântica. O parâmetro de controle não é mais a temperatura mas um parâmetro físico. Escrevemos agora o comportamento do comprimento de correlação na forma

$$\xi \sim |\delta|^{-\nu}$$

$$\tau_c \equiv \xi_\tau \sim \xi^z$$

onde $\delta = |g - g_c|/g_c$.

Distinguímos dois casos, dependendo de haver ou não ordem de longo alcance para temperaturas finitas.

5.1 Ordem apenas em $T = 0$

O exemplo da cadeia de junções Josephson está nessa situação. A transição ocorre para $T = 0$, ou seja, quando temos um sistema XY bidimensional. Para temperaturas finitas, o modelo XY é o de uma fita infinita, ou seja, um sistema clássico unidimensional com interações de curto alcance, o qual é desordenado para todos valores finitos de K (temperaturas finitas na linguagem clássica). Essa é também a situação de magnetos bidimensionais com simetria $SU(2)$ quando a ordem é proibida para $T \neq 0$ devido ao teorema de Mermin-Wagner. A figura descreve a situação quando temos ordem apenas em $T = 0$. O comportamento para $T \neq 0$ caracteriza-se por três regimes bem

diferentes, separados por transições que dependem se o comportamento é dominado por flutuações térmicas ou quânticas do parâmetro de ordem. Na região de desordem térmica, a ordem de longo alcance é destruída principalmente pelas flutuações térmicas do parâmetro de ordem. Já na região de desordem quântica, a física é dominada pelas flutuações quânticas, o sistema é similar ao estado fundamental de desordem quântica em $g > g_c$. Na região intermediária, conhecida como região quântica crítica, quanto ambas as flutuações são importantes. Essa região localiza-se próxima do valor crítico do parâmetro de controle, $g = g_c$, mas a (relativamente falando) altas temperaturas. A região intermediária é limitada pelas condições

$$k_B T > \hbar \omega_c \propto |g - g_c|^{\nu z}$$

A física do sistema do sistema na região crítica quântica é controlada pelas excitações térmicas do estado fundamental quântico crítico, cujas principais características é a ausência de excitações do tipo-quase-partículas usuais. O resultado é que as propriedades a temperatura finita na região quântica crítica apresenta resultados não usuais como leis de potência não-convencionais, comportamento fora do previsto pelo líquido de Fermi (férmions pesados, por exemplo), etc.

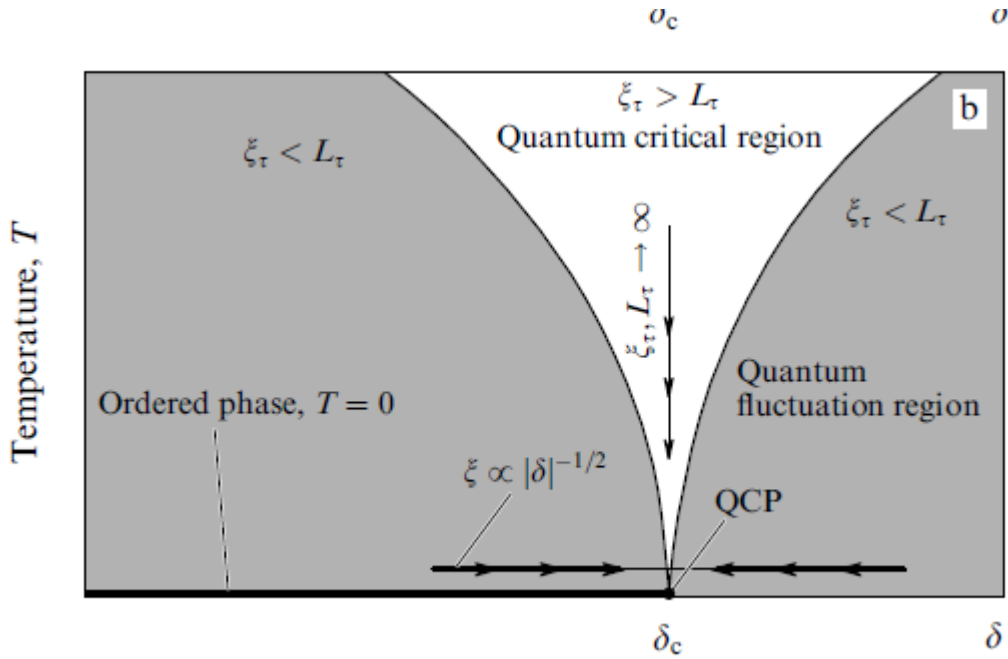


Figure 5: Diagrama de fase na vizinhança do ponto crítico quântico quando não existe ordem de longo alcance para temperaturas finitas.

5.2 Ordem de longo-alcance em $T \neq 0$

No caso em que existe ordem de longo alcance a temperaturas finitas, o diagrama tem a forma da figura. Aqui temos uma transição de fase variando g para valores finitos de T . O ponto crítico quântico pode ser visto como o final da linha de transição a temperatura finita. As flutuações clássicas dominam na vizinhança do limite de fase a T finito mas essa região torna-se cada vez mais estreita na medida que a temperatura diminui, podendo inclusive não ser observável a baixas temperaturas.

O ponto crítico pode ser aproximado de duas maneiras diferentes: $g \rightarrow g_c$ a $T = 0$ ou $T \rightarrow 0$ a $g = g_c$. No entanto, podemos ter classes de universalidade diferentes para $T \neq 0$. Vamos considerar uma extensão do nosso exemplo, uma cadeia 2D de junções Josephson. Nesse caso, o problema quântico mapeia em um problema clássico de dimensões $3 (2 + 1)$. No ponto crítico quântico a $T = 0$, a transição entre o supercondutor e o isolante é caracterizada pelo expoente do modelo XY 3D, similar a transição clássica do hélio líquido com $K - K_c$ desempenhando o papel

de $T - T_c$. Para $T \neq 0$, o sistema torna-se efetivamente bidimensional e tem uma transição do tipo Kosterlitz-Thouless XY 2D para valores menores de K , ao longo da linha cheia. Isso porque é necessário diminuir as flutuações quânticas para que tenhamos ordem a temperatura finita. Acima de uma temperatura crítica, o sistema torna-se desordenado devido as flutuações térmicas. Se K aumenta muito, o sistema é desordenado mesmo a baixas temperaturas, inclusive $T = 0$. É quando o supercondutor atua como um isolante. Para temperaturas finitas, nenhum sistema com um gap é um isolante verdadeiro. A linha cheia divide esse regime, quando a temperatura é menor e maior que o gap.

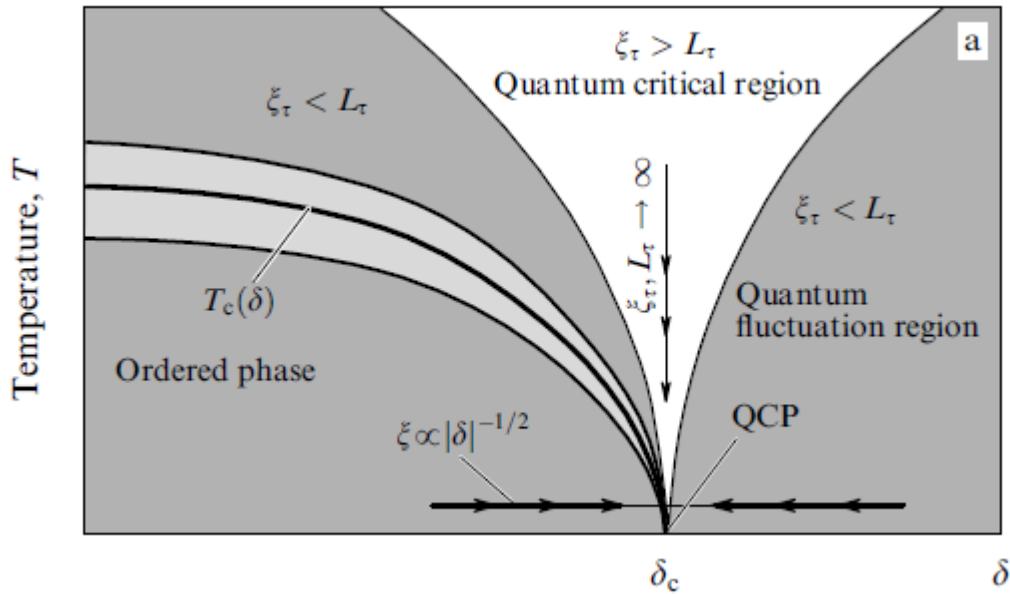


Figure 6: Diagrama de fase esquemático na vizinhança do ponto crítico quando existe fase ordenada a $T \neq 0$.

A mudança de regime é caracterizada pela mudança efetiva da dimensão (governada pela temperatura finita). A questão é quando o sistema sabe dessa mudança de dimensão. A figura ilustra essa situação. Quando o acoplamento K encontra-se longe do valor crítico a temperatura nula, K_c , o comprimento de correlação ξ não é grande, correspondendo a tempos de correlação $\tau_c \sim \xi^z$ pequenos. Enquanto o tempo de correlação for menor que a espessura do sistema $\hbar\beta$, o sistema não percebe que a temperatura é finita. As frequências características das flutuações obedece a condição $\hbar\omega \gg k_B T$ e o sistema é quântico. Na medida que o acoplamento crítico aproxima-se,

o tempo de correlação aumenta e eventualmente supera $\hbar\beta$. O tempo de correlação nesse caso é limitado pela temperatura. Nesse ponto, o sistema sabe que a temperatura é finita e comporta-se agora efetivamente como um sistema clássico de dimensão- d no lugar de um sistema com dimensão- $(d + 1)$.

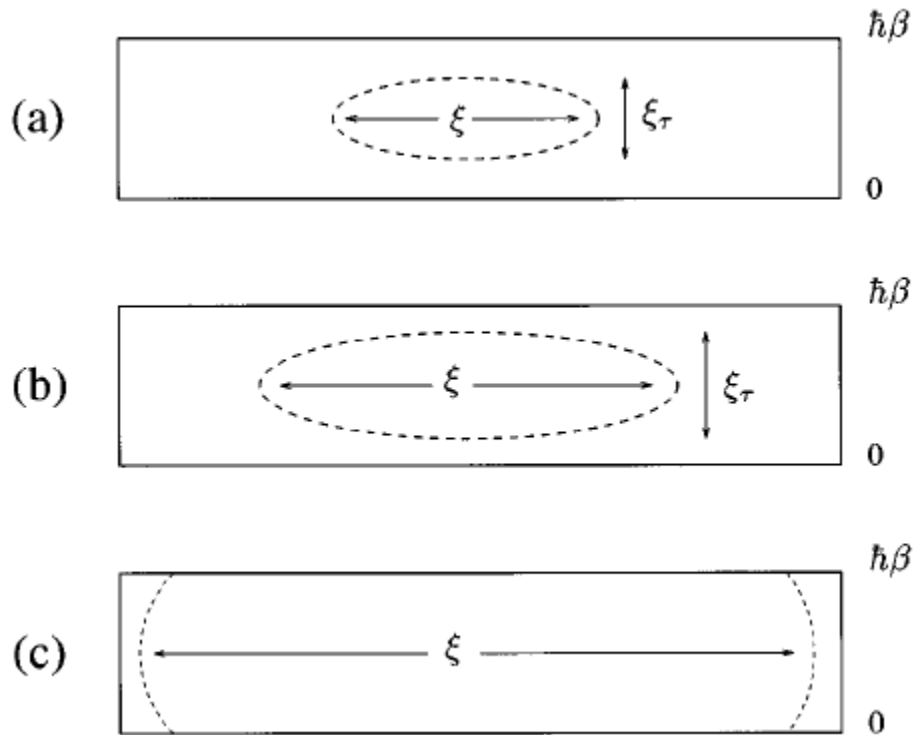


Figure 7: Esquema mostrando o volume de correlação na medida que o acoplamento crítico K_c aproxima-se do sistema com uma dimensão finita na direção temporal. (a) O tempo de correlação é muito maior que $\hbar\beta$. (b) Valores comparáveis. (c) O sistema está próximo do ponto crítico e o tempo de correlação supera em muito $\hbar\beta$.

6 Escala no comportamento quântico

Vamos retomar as relações de escalonamento para o caso das transições quânticas. A extensão para $T = 0$ da relação de escalonamento da energia livre pode ser estendida para

$$f(t, H) = b^{-(d+z)} f(tb^{1/\nu}, Hb^{y_B})$$

onde $t = \delta$. Para o nosso exemplo, $z = 1$.

A transição entre o comportamento clássico-quântico com a temperatura, que acabamos de discutir, equivale à condição

$$|t|^{\nu z} < k_B T \iff \tau_c > \beta$$

Quando nos aproximamos da transição a temperatura nula baixando a temperatura a $g = g_c$, tanto β como τ_c divergem e os efeitos quânticos são sempre importantes. Temos um sistema com dimensão $d + z$. Para incluir esse comportamento no escalonamento generalizamos a lei de escala para temperaturas finitas,

$$f(t, H, T) = b^{-(d+z)} f(tb^{1/\nu}, Hb^{y_B}, Tb^z)$$

A lei de escala para a energia livre trás o comportamento de escalonamento tanto para os observáveis estáticos como dinâmicos.

7 Comprimento de defasamento

Em $T = 0$ os pontos críticos não tem gap e são invariantes na escala. Ou seja, eles tem flutuações quânticas em todas as frequências até a frequência nula. A temperatura introduz uma nova escala de energia. Modos cujas frequências são maiores que $k_B T / \hbar$ não são afetados enquanto que os que tem frequências menores são ocupados por muitos quanta e, portanto, comportam-se classicamente. Temos um novo comprimento de escala que denominaremos comprimento de defasamento, L_ϕ , associado ao ponto de transição quântica. Na nossa descrição de tempo imaginário, as flutuações quânticas são flutuações na direção temporal. Essas flutuações não podem ser maiores que a dimensão do sistema na direção temporal, $L_\tau = \hbar\beta$. Como as correlações espaciais e temporais estão associadas via $\tau_c \sim \xi^z$, segue que as correlações espaciais associadas as flutuações quânticas não podem ser maiores que $L_\tau^{1/z}$. Como o alcance espacial das flutuações quânticas é o comprimento

de defasamento, temos

$$L_\phi \sim \frac{1}{T^{1/z}}$$

Note que para $T \rightarrow 0$ o comprimento de defasamento diverge e o sistema comporta-se sempre quanticamente, mesmo se desordenado.

8 Exemplos experimentais

1) $LiHoF_4$

As excitações em baixo campo magnético do isolante $LiHoF_4$ consiste em flutuações dos íons de Ho entre dois estados de spin alinhados paralelamente e antiparalelamente a um eixo cristallino em particular. Esses estados comportam-se como um modelo de Ising. Um campo magnético externo transversal permite o sistema tunelar entre os dois estados. A física do sistema é descrita por um modelo de Ising na presença de um campo transversal. Esse problema pode ser mapeado em um modelo de Ising de dimensão $d + 1$ com acoplamento anisotrópico (ver ref. 4). A figura mostra a transição de fase medida (ref. 8) mostrando a transição de fase no ponto quântico crítico (a $T = 0$) e também uma transição de fase dependente da temperatura, tipicamente uma transição de fase de Curie.

2) $CeCu_{6-x}Au_x$

O $CeCu_{6-x}Au_x$ é um material férmion pesado que tem um estado fundamental ordenado com os momentos magnéticos nos íons de Ce formando uma onda de densidade de spin com um período incomensurável (o operador de spin oscila com um período que não é um número racional vezes o período da rede cristalina). Essa ordem desaparece se diminuirmos a concentração x (ou colocando o cristal sob pressão). Nesse caso, o estado fundamental comporta-se como um líquido de Fermi com uma masa efetiva pesada. A figura ilustra o comportamento desse material.

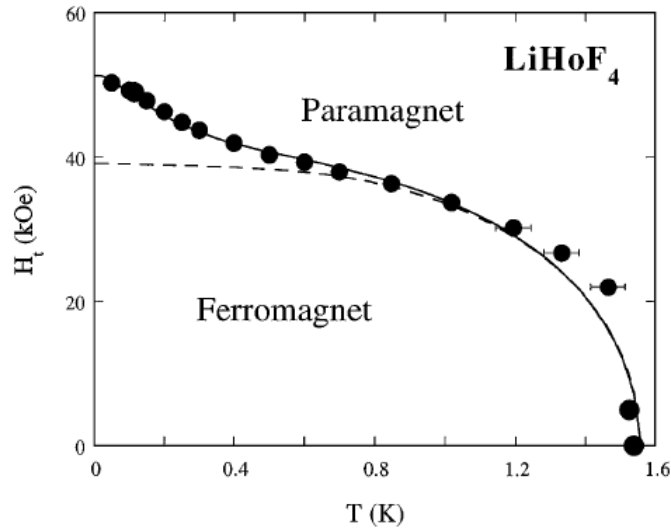


Figure 8: Diagrama de fase do LiHoF_4 na presença de um campo transversal ao eixo c . A linha tracejada representa a teoria de campo médio descrita no artigo original incluindo os estados eletrônicos enquanto que a linha cheia inclui também as interações hiperfinas. Extraído da ref. 8.

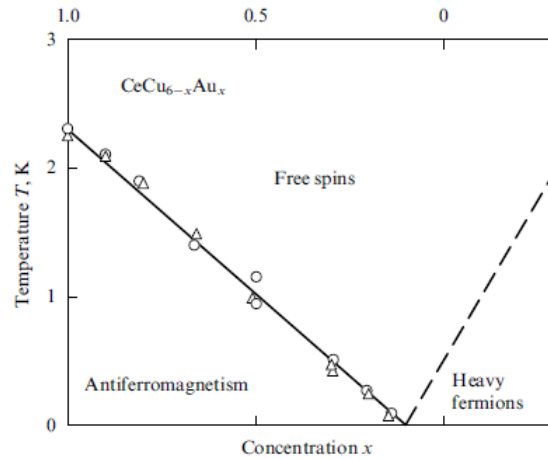


Figure 9: Diagrama de fase de concentração do $\text{CeCu}_{6-x}\text{Au}_x$. A região de spins livres corresponde a região quântica crítica. Extraído da ref. 9.

3) Elétrons bidimensionais.

Sistemas bidimensionais com um gás de elétrons, formados em heterojunções de GaAs-(Ga,Al)As de alta mobilidade na presença de um campo magnético dão origem ao efeito Hall quântico inteiro e fracionário. Esses sistemas comportam-se como fases quânticas.

4) Rede de junção Josephson.

Esse sistema foi discutido e teve sua implementação experimental por Haviland et al. (ref. 7). A figura mostra a rede de junções Josephson. A figura mostra a resistência em função da temperatura para vários campos magnéticos. Observamos que a partir de um valor do campo magnético, a resistência mostra um forte aumento com $T \rightarrow 0$, típico de um isolante, diferenciando-se da fase supercondutora onde a resistência fica independente da temperatura para $T \rightarrow 0$.

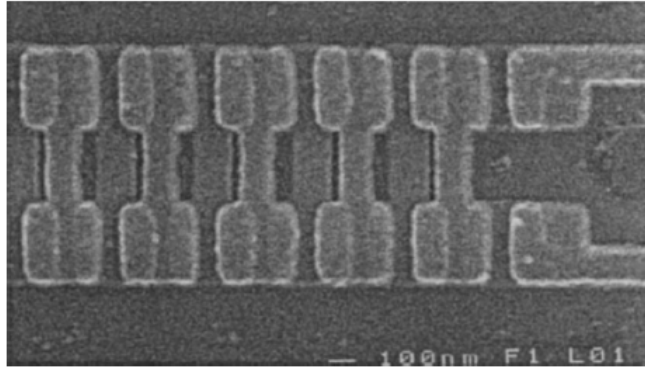


Figure 10: Microscopia eletrônica da cadeia de junções Josephson (SQUIDS). Extraído da ref. 7.

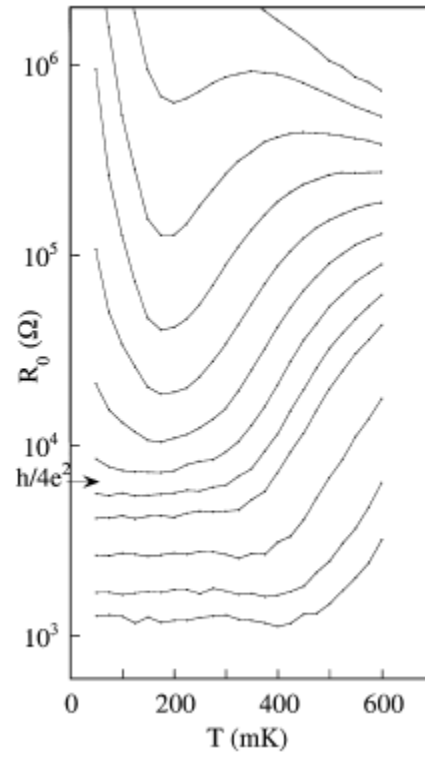


Figure 11: Resistência a voltagem nula em função da temperatura para vários valores do campo magnético. Extraído da ref. 7.

9 Modelo de Ising na presença de um campo transversal

References

- [1] S. Sachdev, **Quantum Phase Transitions**, Cambridge University Press, 2a. ed., 2011.
- [2] S.L. Sondhi, S.M. Girvin, J.P. Carini, e D. Shahar, *Continuous quantum phase transitions*, Rev. Mod. Phys. **69**, 315 (1997).
- [3] Matthias Vojta, *Quantum phase transitions*, Reports on Progress in Physics **66**, 2069 (2003).
- [4] G.G. Batrouni e R.T. Scalettar, **Quantum Phase Transitions**, Oxford University Press.
- [5] M. Wallin, E.S. Sorensen, S.M. Girvin e A.P. Young, Phys. Rev. B **49**, 12115 (1994).
- [6] E. Chow, P. Delsing, D.B. Haviland, Phys. Rev. Lett. **81**, 204 (1998).
- [7] D.B. Haviland, E. Chow, P. Delsing, Physica B: Condensed Matter **284**, 1808 (2000).
- [8] D. Bitko, T.F. Rosenbaum, e G. Aeppli, Phys. Rev. Lett. **77**, 940 (1996).
- [9] A. Schröder et al., Nature **407**, 351 (2000).
- [10]