FI 101 - Prova 2

Problema 2: Hidrodinâmica (problema 8.3 do Chaikin-Lubensky)

O objetivo é derivar uma expressão geral para os coeficientes de transporte em termos das funções de correlação de corrente e estabelecer o teorema de reciprocidade de Onsager. Considere $\{\rho_\alpha(\vec{r},t)\}$ um conjunto de variáveis que se conservam com seus campos conjugados associados $\{h_\alpha(\vec{r},t)\}$ e correntes $\left\{\vec{J}_\alpha(\vec{r},t)\right\}$ satisfazendo a equação de conservação

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_\alpha = 0$$

(a) Mostre que a lei de conservação implica que

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\chi}''_{J_{\alpha i}\rho_\beta}(\vec{r},\vec{r}',t,t') = -\frac{\partial}{\partial t'}\tilde{\chi}''_{J_{\alpha i}\rho_\beta}(\vec{r},\vec{r}',t,t') = \nabla'_j\tilde{\chi}''_{J_{\alpha i}J_{\beta j}}(\vec{r},\vec{r}',t,t')$$

(b) A seguir, mostre que, utilizando essa expressão, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\delta J_{\alpha i}(\vec{r},t)\right\rangle &= \sum_\beta\{\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\int \mathrm{d}^d r\left[-2i\tilde{\chi}''_{J_{\alpha i}J_{\beta j}}(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\nabla'_j\delta h_\beta(\vec{r}',t')\right] \\ &\quad +2i\int \mathrm{d}^d r'\tilde{\chi}''_{J_{\alpha i}\rho_\beta}(\vec{r}-\vec{r}',t-t'=0)\delta h_\beta(\vec{r}',t)\}\end{aligned}$$

Se o campo externo varia lentamente no espaço e tempo, podemos aproximar

$$\delta h_\beta(\vec{r}',t') = \delta h_\beta(\vec{r}+\vec{r}'-\vec{r},t+t'-t) \approx \delta h_\beta(\vec{r},t)$$

(c) Mostre que nesse caso

$$\begin{aligned}\delta\left\langle J_{\alpha i}(\vec{r},\omega)\right\rangle &= -\frac{1}{i\omega}\sum_{\beta j}\left[\chi_{J_{\alpha i}J_{\beta j}}(\vec{q}=0,\omega)-\chi_{J_{\alpha i}J_{\beta j}}(\vec{q}=0,\omega=0)\right]\nabla_j\delta h_\beta(\vec{r},\omega) \\ &= -\sum_{\beta j}\int\frac{\mathrm{d}\omega'}{\pi i}\frac{\chi''_{J_{\alpha i}J_{\beta j}}(0,\omega')}{\omega'(\omega'-\omega)}\nabla_j\delta h_{\beta j}(\vec{r},\omega) \\ &= \mathcal{L}_{\alpha i,\beta j}(\omega)\nabla_j\delta h_\beta(\vec{r},\omega)\end{aligned}$$

(d) Se $\vec{J}_\alpha$ e $\vec{J}_\beta$ têm o mesmo sinal sob reversão temporal, mostre que

$$\lambda_{\alpha i,\beta j} = \mathrm{Re}\mathcal{L}_{\alpha i,\beta j} = \lim_{\omega\to 0}\lim_{\vec{q}\to 0}\frac{1}{\omega}\chi''_{J_{\alpha i}J_{\beta j}}(\vec{q},\omega)$$

(e) Finalmente, utilizando o teorema de flutuação-resposta, mostre que

$$\lambda_{\alpha i,\beta j} = \frac{1}{k_B T}\int_0^\infty \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^d r \left\langle \frac{1}{2}\left\{J_{\alpha i}(\vec{r},t), J_{\beta j}(0,0\right\}\right\rangle$$

onde {...} é o anticomutador. Esse resultado leva a relação de reciprocidade de Onsager,

$$\lambda_{J_{\alpha i},J_{\beta j}} = \lambda_{J_{\beta j},,J_{\alpha i}}$$

Problem 2 - Hydrodynamic - dinamic modes for the simple fluid

(Follow the Chaikin-Lubensky terms definition)

Consider the dissipative generalized Euler's equation for a simple fluid:

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}p + \eta\nabla^2\vec{v} + (\zeta + \frac{1}{3}\eta)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$$

and the two conservation laws for the mass and energy.

(a) Write the above equation for $\vec{g}$ instead of $\vec{v}$.

(b) Separate the components for $\vec{g}$ in a longitudinal and transversal parts,

$$\vec{g} = \vec{g}_l + \vec{g}_t$$

where

$$\vec{\nabla}\times\vec{g}_l = 0$$

and

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g}_t = 0$$

Consider a linearized version for the dynamical equations and find all the dynamical modes for i) a dissipation less case and ii) when there is dissipation.

Work out the details the best you can.

(c) Faça a extensão para o caso de dois fluidos, considere o caso do superfluido, e mostre que você encontra quadro modos com

$$\omega = \pm c_1 q$$

$$\omega = \pm c_2 q$$

e que para $T \to 0$, temos

$$c_1^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

e

$$c_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{T\tilde{s}}{\tilde{c}_v}$$

Observe que $c_2 \to 0$ para $\rho_s \to 0$, como deveríamos esperar.

(Siga a nomenclatura do Chaikin-Lubensky).