Pequeno tutorial sobre derivada:

Nosso objetivo é calcular a velocidade, dado um gráfico de x em função de t, ou seja, x(t). Vamos utilizar esse exemplo como paradigma, os outros casos se adaptam.

Para isso, vamos considerar o gráfico x(t) abaixo. O gráfico foi obtido numeriamente com pontos em intervalos de 0,1. As unidades são metros e segundos mas vamos omitir daqui pra frente.

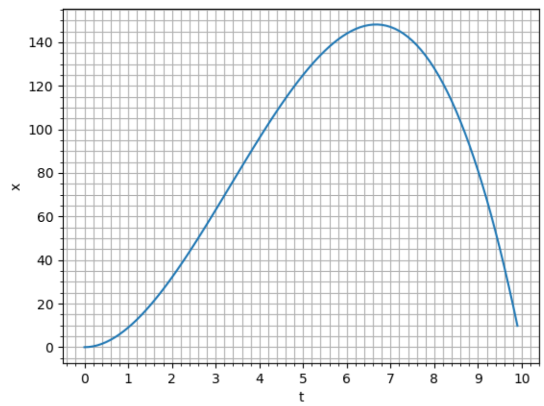

Figure 1: Gráfico da posição x em função do tempo t.

Nosso objetivo é calcular a velocidade em cada instante de tempo t. Para isso, vamos começar passo a passo. Consideremos que inicialmente só conseguimos medir pontos de 2 em 2. Com isso, podemos calcular a velocidade média nesses intervalos. Ou seja,

$$v_{media}(i) = \frac{x(i+1) - x(i)}{t(i+1) - t(i)} = \frac{\Delta x(i)}{\Delta t(i)}$$

O resultado está na curva abaixo (pontos azuis).

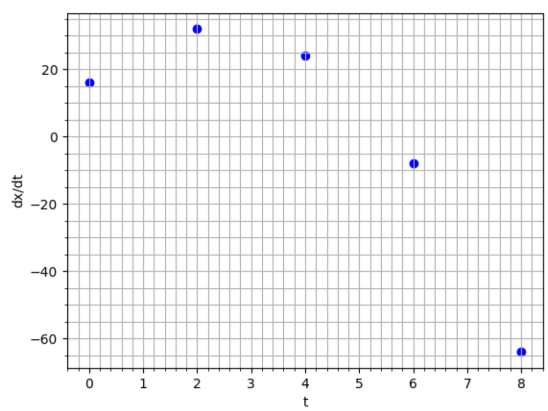

Figure 2: Gráfico da velocidade média calculada em intervalos de $\Delta t = 2$.

Vamos repetir o cálculo mas agora em intervalos de 1, isto é, $t(i+1) - t(i) = 1$. O resultado está nos pontos vermelho na figura abaixo. Temos mais pontos porque temos intervalos menores, apenas isso. Concentre-se em um dos pontos azuis e segue ele... por exemplo, $t = 6$.

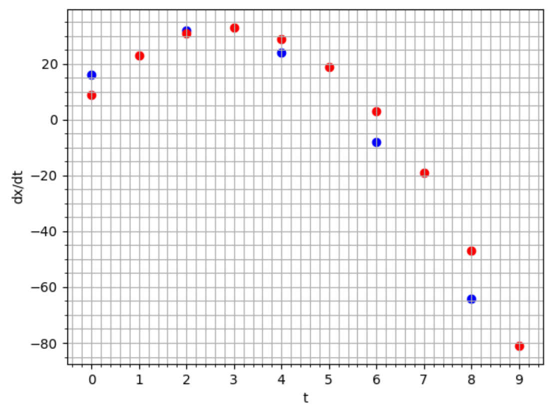

Figure 3: Gráfico da velocidade média calculada em intervalos de $\Delta t = 2$ (azul) e 1 (vermelho).

Prosseguimos dessa forma, agora com intervalos igual a 0.5 (verde) e 0.25 (magenta), na figura abaixo.

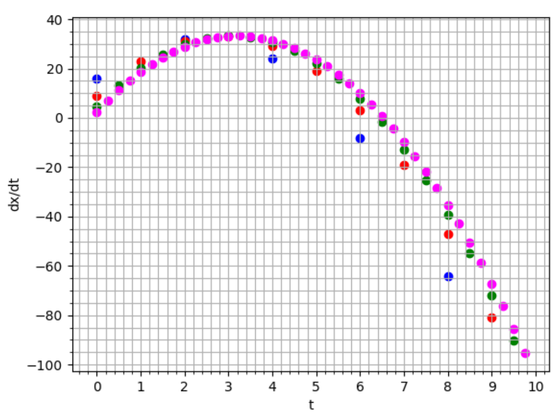

Figure 4: Gráfico da velocidade média calculada em intervalos de $\Delta t = 2$ (azul) e 1 (vermelho), $0,5$ (verde) e $0,25$ (magenta).

Note que os valores convergem. Vamos escolher um ponto ($t = 6$) e fazer o gráfico da reta $f_v(t) = x(6) + v * (t - 6)$, onde v foi calculado numericamente como fizemos. O gráfico abaixo mostra o resultado ampliado em torno do ponto $t = 6$.

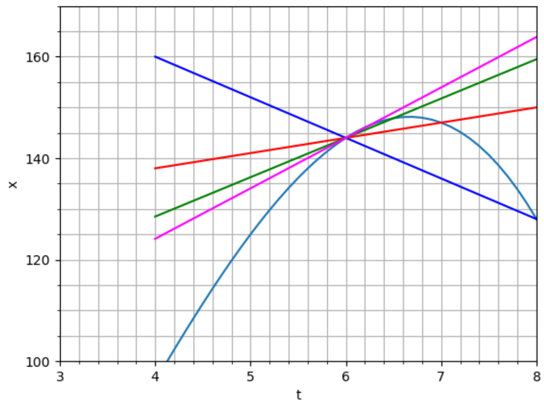

Figure 5: Gráfico da reta de $x(t)$ e de $f_v(t)$ para vários valores de v.

Observe que a reta aproxima-se da tangente da curva no ponto $t = 6$ e que a derivada, ou melhor, a velocidade média, nada mais é do que a inclinação da reta. Se fizermos o intervalo $\Delta t(i) = t(i+1) - t(i) \to 0$, devemos obter o resultado exato. Note que experimentalmente o que interessa é o intervalo de maior precisão que podemos medir... mas matematicamente podemos fazer a abstração do limite do intervalo indo para zero. Em outras palavras,

$$v(i) = \lim_{\Delta t(i)} \frac{x(i+1) - x(i)}{\Delta t(i)} \equiv \frac{dx}{dt}$$

Podemos considerar dx, dt como os diferenciais, isto é, o limite dos intervalos quando o intervalo da variável (t, no nosso caso) for para zero. Como podemos calcular isso matematicamente? Bem, para isso precisamos da função $x(t)$. No nosso caso, ela é

$$x(t) = at^2 - bt^3$$

onde $a = 10$ e $b = 1$. Como nossos intervalos são constantes, podemos escrever $t(i+1) = t(i) + \Delta t$ e então

$$v_{\Delta t}(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

e,

$$x(t+\Delta t) = a(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) - b(t^3 + 3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3)$$

É imediato que

$$\begin{aligned} v_{\Delta t}(t) &= \frac{a(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) - b(t^3 + 3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3) - (at^2 - bt^3)}{\Delta t} \\ &= \frac{a(2t\Delta t + (\Delta t)^2) - b(3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3)}{\Delta t} = a(2t + \Delta t) - b(3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^3 \end{aligned}$$

Fazendo o limite,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} [a(2t + \Delta t) - b(3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^3] = 2at - 3bt^2$$

As curvas abaixo repete as curvas anteriores acrescentando curvas em preto que são os resultados exatos calculados acima para a derivada e a tangente no ponto $t = 6$, em preto.

Podemos extrapolar algumas regras básicas do que fizemos acima...

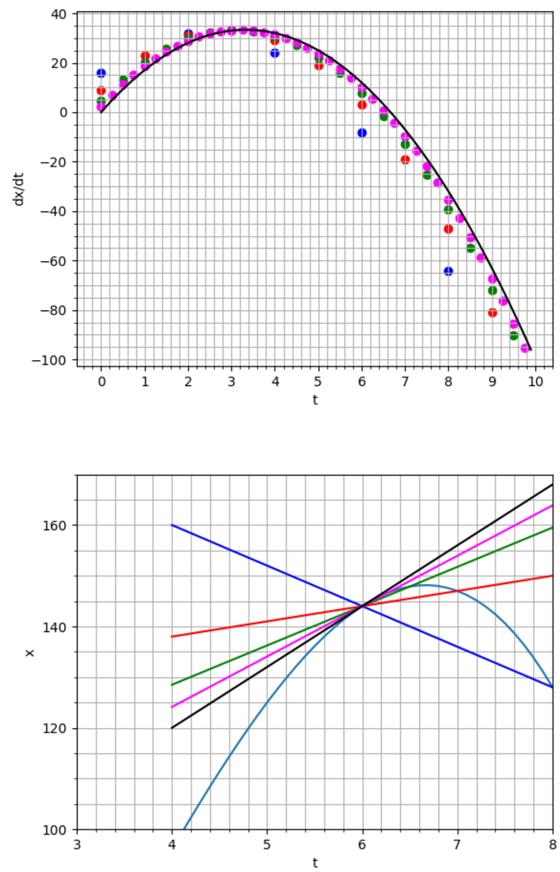

Figure 6: (Superior) Cálculo da derivada calculado numericamente (ver definições anteriores) e exatamente (em preto). (Inferior) Tangente da curva no ponto $t = 6$ calculado numericamente (ver definições anteriores) e exatamente (preto).

$$\frac{d[af(t)]}{dt} = a\frac{df(t)}{dt}$$

onde a é uma constante. E, se observarmos o resultado para t^n com $n = 2$ e $n = 3$ que obtivemos (para $n = 1$ é imediato), podemos generalizar

$$\frac{d[t^n]}{dt} = nt^{n-1}$$

Para outras funções, temos que saber calcular valores aproximados. Tomemos um exemplo "relativamente" simples (principalmente quando se sabe o resultado). $f(t) = \cos t$. Nesse caso,

$$\cos(t + \Delta t) = \cos(t)\cos(\Delta t) - \sin(t)\sin(\Delta t)$$

Mas, $\cos(\Delta t) \approx 1$ e $\sin(\Delta t) \approx \Delta t$, para Δt suficientemente pequeno. Logo,

$$\frac{d[\cos(t)]}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cos(t + \Delta t) - \cos(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\Delta t \sin(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}(-\sin(t)) = -\sin(t)$$

Finalmente, e a demonstração disso fica pro curso de Cálculo 1, podemos escrever o limite dos dois diferenciais como um operador de derivada:

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv \frac{d}{dt}x(t)$$

onde agora d/dt é um operador aplicado na função $x(t)$.

Na prática, com o uso, nós memorizamos a maior parte das regras de derivação. Mas elas são todas demonstráveis, seguindo o raciocínio acima... ver curso de Cálculo 1.