

III Momento de dipolo magnético e o spin eletrônico

III.1 Polarização de fótons e a experiência de Stern-Gerlach

Para finalizar a análise do comportamento das ondas EM como composta por fótons, vamos estudar o experimento de polarização da luz. Suponha que incidimos sobre um polarizador uma onda EM polarizada na direção \hat{e} que se propaga ao longo da direção \hat{z} . O polarizador transmite a onda EM polarizada na direção \hat{x} e absorve a componente \hat{y} . A onda polarizada na direção \hat{e} tem a forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{e} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Após deixar o polarizador a onda eletromagnética é representada por

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = E'_0 \hat{x} e^{i(kz - \omega t)}$$

Como o ângulo entre \hat{e} e \hat{x} é θ e a intensidade $I \propto |\mathbf{E}|^2$ temos

$$E'_0 = E_0 \cos \theta \Rightarrow I' = I \cos^2 \theta.$$

Vamos agora analisar este experimento do ponto de vista corpuscular. Quando um feixe pouco intenso atinge o polarizador, este deteta apenas a chegada individual de cada fóton: ou o fóton atravessa o polarizador ou é por ele absorvido. De antemão não podemos afirmar se um dado fóton será ou não absorvido. Só podemos ter conhecimento da probabilidade de um dado evento. Finalmente, após N fótons terem incidido sobre o polarizador apenas $N \cos^2 \theta$ o terão atravessado. O que aqui ocorre pode ser resumido por:

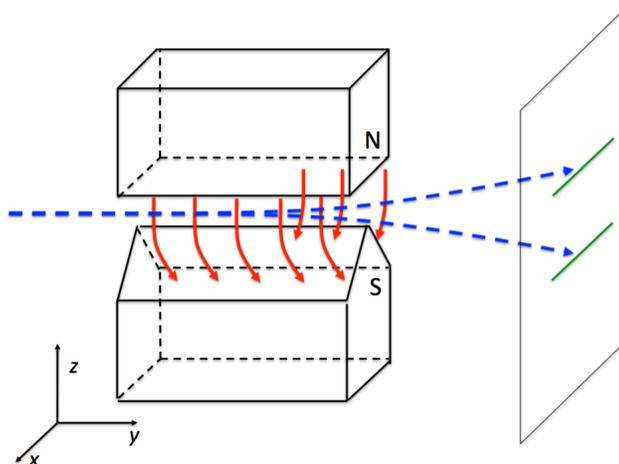
- i) Após o processo de interação com o polarizador, o fóton assume um ou outro valor de polarização através da sua absorção ou passagem pelo mesmo. Estes são os chamados *auto valores da medida*. Note que aqui o valor medido não varia continuamente como no caso clássico.
- ii) Após a medida (interação com o polarizador), os fótons terão, com certeza, polarização em \hat{x} . Dizemos, então, que o seu estado de polarização é \hat{x} . A cada auto valor corresponde um auto estado. No caso considerado, \hat{x} e \hat{y} são os *auto estados de polarização*.
- iii) Decomposição espectral: Podemos apenas saber a probabilidade de se obter um dado auto valor após a medida.

$$\Rightarrow \hat{e} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\hat{x}) = \cos^2 \theta \\ P(\hat{y}) = \sin^2 \theta \end{array} \right\} \Rightarrow P(\hat{x}) + P(\hat{y}) = 1 \quad (1)$$

A propriedade de polarização dos fótons, ou melhor, do estado de polarização dos fótons não ocorre apenas para estes quanta da radiação EM. Partículas materiais também possuem estado de polarização e esta afirmativa é baseada na experiência de Stern-Gerlach que descrevemos abaixo, em sua versão simplificada.



A força que atua nos elétrons do feixe (colimado na direção $\hat{\mathbf{y}}$) é

$$\mathbf{F} = +\nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$$

onde $\boldsymbol{\mu}$ é o momento magnético do elétron e \mathbf{B} o campo magnético. Devido à simetria na direção $\hat{\mathbf{y}}$ temos $B_y = 0$ e

$$\mathbf{B} = B_x(x, z)\hat{\mathbf{x}} + B_z(x, z)\hat{\mathbf{z}}$$

Por outro lado, se o feixe se propaga ao longo do eixo de simetria $\hat{\mathbf{y}}$, $B_x = 0$, $\nabla B_x \approx 0$ e $\nabla B_z \parallel \hat{\mathbf{z}}$,

$$\Rightarrow \mathbf{F} \approx \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \Big|_{x=z=0} \hat{\mathbf{z}} = \mu \cos \theta \frac{\partial B_z}{\partial z} \Big|_{x=z=0} \hat{\mathbf{z}}$$

onde θ é o ângulo entre $\boldsymbol{\mu}$ e \mathbf{B} (ou seja, $\hat{\mathbf{z}}$).

Se os elétrons têm momentos magnéticos distribuídos aleatoriamente esperaríamos uma distribuição uniforme de impactos na placa entre μ e $-\mu$ pois $\mu_z = \mu \cos \theta$. Entretanto, não é isto o que ocorre. A distribuição de impactos concentra-se nos valores extremos proporcionais a μ e $-\mu$.

Conhecendo-se $\partial B_z / \partial z$ e medindo a deflexão podemos encontrar o valor do momento magnético do elétron que é dado por

$$\mu = \frac{-|e|\hbar}{2m} \equiv \mu_B \text{ (magneton de Bohr)} \quad (2)$$

Neste ponto podemos comparar a fórmula de $\boldsymbol{\mu}$ com a de uma esfera de mesma carga e momento angular \mathbf{L} . A teoria clássica nos diz que ($e = -|e|$)

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m} \mathbf{L} \quad (3)$$

e, portanto, seríamos tentados a associar um momento angular intrínseco $L = \hbar$ ao elétron. Entretanto, esta associação está errada. O spin do elétron é tal que $S_z = \pm \hbar/2$ e portanto devemos generalizar a fórmula clássica para

$$\mu_z = g_s \left(\frac{e}{2m} \right) S_z \quad (4)$$

onde g_s é o *fator giromagnético* do elétron (≈ 2).

O resultado da experiência nos leva a ampliar a nossa noção do estado eletrônico. Ao invés de descrevê-lo apenas como $\psi(\mathbf{r}, t)$ precisamos levar em conta o seu momento magnético. As diferentes concentrações de impactos nos dão as probabilidades de encontrar o elétron com diferentes projeções do momento magnético. Desta forma,

$$\int d^3r (|\psi(\mathbf{r}, \uparrow)|^2 + |\psi(\mathbf{r}, \downarrow)|^2) = 1, \quad (5)$$

onde $\psi(\mathbf{r}, \uparrow)$ ($\psi(\mathbf{r}, \downarrow)$) representa a amplitude de probabilidade de encontrarmos o elétron com momento magnético na direção $\hat{\mathbf{z}}$ ($-\hat{\mathbf{z}}$). Este estado pode ser descrito como

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \chi_{\uparrow} e \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \chi_{\downarrow} \quad (6)$$

Note que χ_{\uparrow} e χ_{\downarrow} são análogos aos vetores unitários $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ na decomposição do campo elétrico

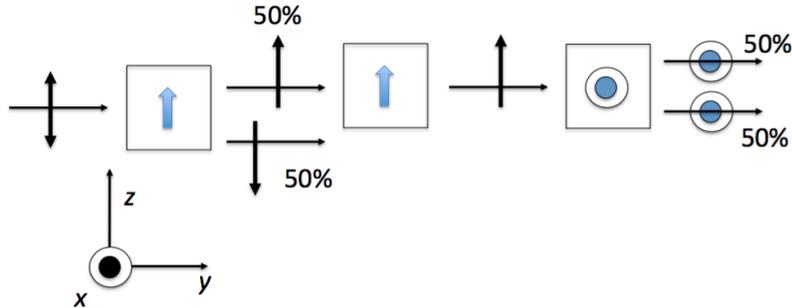
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_x(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + E_y(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}}$$

numa experiência de polarização do campo EM. Entretanto esta analogia não é completa. Enquanto $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ representam os estados de polarização dos fótons nas direções $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$, χ_{\uparrow} e χ_{\downarrow} estão associados ao momento magnético apontar em $\hat{\mathbf{z}}$ e $-\hat{\mathbf{z}}$. χ_{\uparrow} e χ_{\downarrow} , apesar de admitirem a representação bidimensional, não representam os unitários do sistema cartesiano bidimensional. A nossa conclusão é que os pontos (i), (ii) e (iii) que enfatizamos no caso da experiência com fótons ocorrem também no caso de partículas massivas que possuem $\boldsymbol{\mu} \neq 0$. Um fóton passando pelo polarizador \leftrightarrow elétron defletido para χ_{\uparrow} enquanto que o fóton absorvido \leftrightarrow elétron defletido para χ_{\downarrow} . A probabilidade de se encontrar $+\mu_B$ ($-\mu_B$) é $|\psi_{\uparrow}|^2$ ($|\psi_{\downarrow}|^2$) e temos $|\psi_{\uparrow}|^2 + |\psi_{\downarrow}|^2 = 1$.¹

¹ $|\psi_i|^2 \equiv \int d^3r |\psi(\mathbf{r}, i)|^2, \quad i = \uparrow \text{ ou } \downarrow.$

Quando coletamos o feixe defletido, por exemplo, para cima e repetimos a mesma experiência com $\nabla B_z \parallel \hat{z}$ só existe um feixe defletido e este corresponde a termos $\mu = +\mu_B \hat{z}$. Ou seja, após a medida o estado é, com certeza, $\bar{\psi}(\mathbf{r}) = \bar{\psi}_{\uparrow}(\mathbf{r})\chi_{\uparrow}$ onde $\int |\bar{\psi}_{\uparrow}(\mathbf{r})|^2 d^3r = 1$.

Usando ainda este mesmo feixe e fazendo com que ele passe através de um outro aparato de Stern-Gerlach que desta vez tem $\nabla B_x \parallel \hat{x}$, ou seja, que foi girado de $\pi/2$ em torno de \hat{y} encontramos, novamente, dois picos em $\pm\mu_B$ com as mesmas intensidades. As intensidades dos picos dependem do ângulo de que o imã é girado em torno de \hat{y} . Esquematicamente,



Isto é equivalente a dizermos que incidindo sobre o imã de $\nabla B_z \parallel \hat{z}$ um feixe com elétrons polarizados na direção $\hat{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ o separaremos em dois outros feixes polarizados em $\pm\hat{z}$ com intensidades relativas dependentes de θ ²: $P_{\uparrow} = \cos^2 \frac{\theta}{2}$ e $P_{\downarrow} = \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

²Este resultado não será demonstrado neste curso.