Teorias de escala e grupo de renormalização

Teoria de Landau, $g[m] = \int \left\{ |\nabla m|^2 + r_0 m^2 + u_0 m^4 \right\} d^d r$,

$r_0(T)$ e u_0 → funções analíticas de T

imprecisa p/ $T \sim T_c$.

Hipóteses de escala → condições mais fracas

Quando $T \approx T_c$ $\quad g(T,H) = G(T,H)/N$ é tal que

$$g(T,H) = g_0(T,H) + g_s(T,H) \quad ; \quad t \to \frac{T - T_c}{T_c}$$

Hipótese de escala ou homogeneidade

$$g_s(t,H) = \lambda\, g_s(\lambda^a t, \lambda^b H)$$

λ arbitrário, p. ex, $\lambda^a t = 1 \Rightarrow \lambda = t^{-1/a}$

$$g_s(T,H) = t^{-1/a} g_s\left(1, \frac{H}{t^{b/a}}\right) = t^{-1/a} F\left(\frac{H}{t^{b/a}}\right)$$

$F(x)$ é bem comportada

$\Rightarrow dg = -s\,dT - m\,dH$

$$s = -\frac{\partial g_s}{\partial T} =$$

$$= -\frac{1}{T_c}\left\{ -\frac{1}{a} t^{-\frac{1}{a}-1} F\left(\frac{H}{t^{b/a}}\right) - \frac{b}{a} t^{-\frac{1}{a}-\frac{b}{a}-1} H F'\left(\frac{H}{t^{b/a}}\right) \right\}$$

e $m = -\frac{\partial g_s}{\partial H} = -t^{-\frac{1}{a}-\frac{b}{a}} F'\left(\frac{H}{t^{b/a}}\right)$; se $H=0$

$s(t,0) = \frac{1}{aT_c} t^{-\frac{1}{a}-1} F(0)$ e

$m(t,0) = -t^{-\frac{1}{a}-\frac{b}{a}} F'(0) \Rightarrow \beta = -\frac{1}{a} - \frac{b}{a}$

Derivando s com relação a T

$$c(t,0) = T \left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_{H=0} \sim -\frac{1}{aT_c}\left(\frac{1}{a}+1\right) t^{-\frac{1}{a}-2} F(0)$$

$\Rightarrow \alpha = 2 + \frac{1}{a}$

Para obter γ:

$$\chi(T,H) = \left(\frac{\partial m}{\partial H}\right)_T = -t^{-\frac{1}{a}-\frac{2b}{a}} F''\left(\frac{H}{t^{b/a}}\right)$$

se $H=0$; $\chi_0(T) = \chi(T, H=0) = -t^{-\frac{1}{a}-\frac{2b}{a}} F''(0)$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{2b}{a} + \frac{1}{a}$$

$\Rightarrow \alpha + 2\beta + \gamma = 2$; relação de escala de Rushbrooke

Magnetização: $m(t,H) = t^{\beta} Y\left(\frac{H}{t^{\Delta}}\right)$;

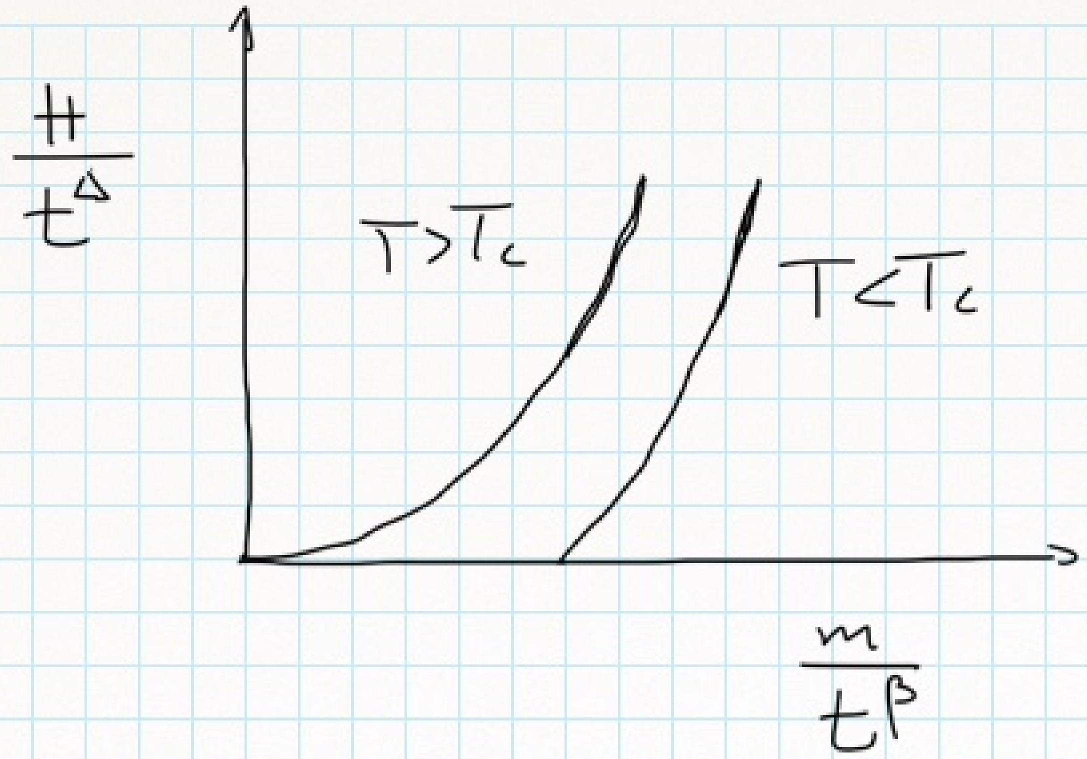
Y é bem comportada e $\Delta = \frac{b}{a} = \beta + \gamma$

$$\Rightarrow \frac{m}{t^{\beta}} = Y\left(\frac{H}{t^{\Delta}}\right)$$

Pela Teoria de Landau:

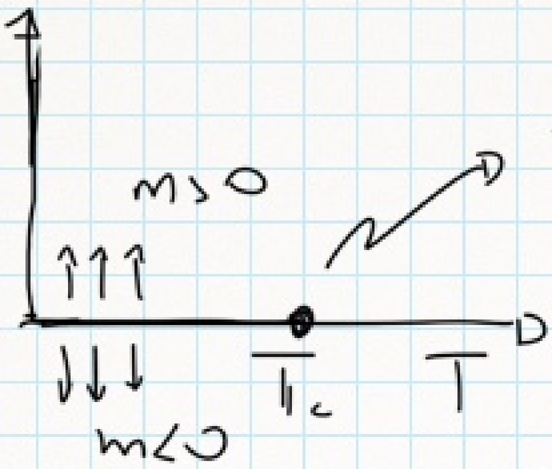
$g_s(t,H) = -mH + tm^2 + m^4 \Rightarrow -H + 2tm + 4m^3 = 0$

$$\Rightarrow g_s(t,H) = \lambda g_s(\lambda^x t, \lambda^y H) \begin{cases} x = -1/2 \quad y = -3/4 \\ g_s(t,H) = t^2 F\left(\frac{H}{t^{3/2}}\right) \end{cases}$$



$\frac{H}{t^\Delta}$
$T>T_c$
$T<T_c$
$\frac{m}{t^\beta}$

Escala das correlações críticas:



$\to$ pto crítico $m=0$ ou $\xi \sim t^{-\nu}$

$$\mathcal{H} = -J\sum_{\langle ij \rangle}^{N} \sigma_i \sigma_j - H \sum_i^N \sigma_i$$

$$m(\beta, H) = \lim_{N\to\infty} m_N(\beta, H) = \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sigma_i \right\rangle_N$$

$$m_0(\beta) = \lim_{H\to 0^+} m(\beta, H)$$

Simetria Translacional:

$$\Gamma_N(k,\ell) = \langle \sigma_k \sigma_\ell \rangle_N - \langle \sigma_k \rangle_N \langle \sigma_\ell \rangle_N = \langle \sigma_k \sigma_\ell \rangle_N - m_N^2$$

Limite Termodinâmico $\Gamma(k,\ell) = \lim_{N\to\infty} \Gamma_N(k,\ell) = \langle \sigma_k \sigma_\ell \rangle - m^2$

Se $H=0$, $m_N = 0$ (simetria de $\mathcal{H}$)

$\Rightarrow \lim_{|\vec{r}_k - \vec{r}_\ell|} \langle \sigma_k \sigma_\ell \rangle \to m_0^2 \neq 0 \to$ ordem de longo alcance

Na criticalidade, $T = T_c$ e $H=0$, $\Gamma(\vec{r}) \to B_d\, r^{-(d-2+\eta)}$

B_d ñ-universal e $\eta = \frac{1}{4}$ em $d=2$.

Para $H=0$ e $T\to T_c$

$$\Gamma(\vec{r}) \sim B_d(\vec{r})\, e^{-r/\xi} \quad \text{onde } \xi = \begin{cases} D_{(+)}\, t^{-\nu} & ; T\to T_c^{(+)} \\ D_{(-)}\,(-t)^{-\nu} & ; T\to T_c^{(-)} \end{cases}$$

Ising em $d=2$ $\nu=1$ mas TCM $\nu=1/2$ e $\eta=0$

Resultados experimentais $(d=3)$; $0.6<\nu<0.7$ e $\eta<0.1$

Resultados numéricos; $\nu \simeq 0.643$ e $\eta \simeq 0.05$

Teoria de escala p/ Γ

$$\Gamma(r,t,H) = \lambda\, \Gamma(\lambda^a r, \lambda^b t, \lambda^c H) = t^{-1/b}\, F\left(\frac{r}{t^{a/b}}, \frac{H}{t^{c/b}}\right)$$

Forma de escala: $\Gamma(r,t,H) = t^{\nu(d-2+\eta)}\, F\left(\frac{r}{t^{-\nu}}, \frac{H}{t^{\Delta}}\right)$

p/ Ising

$$\chi_N(T,H) = \left.\frac{\partial m}{\partial H}\right|_T = \frac{\beta}{N}\left\langle \sum_{ij=1}^{N} \sigma_i \sigma_j \right\rangle_N - \frac{\beta}{N}\left\langle \sum_i \sigma_i \right\rangle_N \left\langle \sum_j \sigma_j \right\rangle_N$$

$$\Rightarrow \chi_N(T,H) = \frac{\beta}{N} \sum_{ij=1}^{N} \Gamma_N(i,j) = \beta \sum_{j=1}^{N} \Gamma_N(1,j)$$

por simetria translacional $\Rightarrow N\to\infty$, $\chi(T,H) = \beta \sum_{\vec{r}} \Gamma(\vec{r})$

que é o teorema de flutuação-resposta.

$$\Rightarrow t^{-\gamma} \sim \int d^d r \, \frac{B}{r^{d-2+\eta}} \, e^{-r/t^{-\nu}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \nu(2-\eta)$$

(Fisher)

Há ainda a relação de hiperescala $2-\alpha = \nu d$

que, do ponto de vista clássico, é satisfeita p/ $\alpha=0$ e $d=4$

$\Rightarrow$ expoentes relacionados a Γ são determinados por apenas dois expoentes termodinâmicos

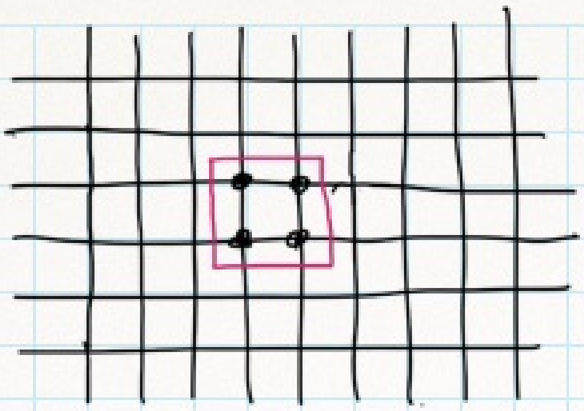
Como justificar a hipótese de homogeneidade e a lei de escala? Como calcular os expoentes

$\underline{a}$ e $\underline{b}$? $\rightarrow$ grupo de renormalização.

Construção de Kadanoff em modelos específicos.

Ising em rede d-dimensional

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - H \sum_i \sigma_i$$



$a \to 2a \Rightarrow b = 2$

$T \to T_c \Rightarrow \xi \to \infty \Rightarrow$ grupos de spin correlacionados

$\Rightarrow$ a cada célula novo spin Θ_α ; $\alpha = 1, 2, \ldots N/b^d$

Suposição: $\mathcal{H}' = -J' \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \Theta_\alpha \Theta_\beta - H' \sum_\alpha \Theta_\alpha$

Como J define T_c, $J \to J' \Rightarrow t \to t'$

Relação entre (t', H') e (t, H) ?

Mesma forma de $\mathcal{H} \Rightarrow g(t', H') = b^d g(t, H)$

onde $g = G/N$.

Hipótese de similaridade: $t' = b^{\lambda_1} t$ e $H' = b^{\lambda_2} H$

onde λ_1 e λ_2 são expoentes críticos $\Rightarrow$

$$\Rightarrow g(b^{\lambda_1} t, b^{\lambda_2} H) = b^d g(t, H)$$

Renormalização p/ Ising em d=1

$$\mathcal{H} = -J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} - H\sum_{i=1}^{N}\sigma_i \quad e \quad Z = \mathrm{Tr}\, e^{\left[K\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} + L\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right]}$$

onde $K \equiv \beta J$ e $L \equiv \beta H$

Se $b=2 \Rightarrow$ redução da metade dos spins somando todos os spins pares. Exemplo: (dizimação)

$$\sum_{\sigma_4} e^{\left[K\sigma_3\sigma_4 + K\sigma_4\sigma_5 + L\sigma_4\right]} = 2\cosh(K\sigma_3 + K\sigma_5 + L)$$

$$= A\, e^{\left[B\sigma_3\sigma_5 + C(\sigma_3+\sigma_5)\right]}$$

onde $B = \frac{1}{4}\ln\left[\cosh(2K+L)\cosh(2K-L)\right] - \frac{1}{2}\ln\cosh L$ e

$$C = \frac{1}{4}\ln\frac{\cosh(2K+L)}{\cosh(2K-L)}$$

e $Z = A^{N/2}\sum_{\{\theta_i\}} \exp\left[K'\theta_i\theta_{i+1} + L'\sum\theta_i\right]$; $\theta_i \to \sigma_i$ e

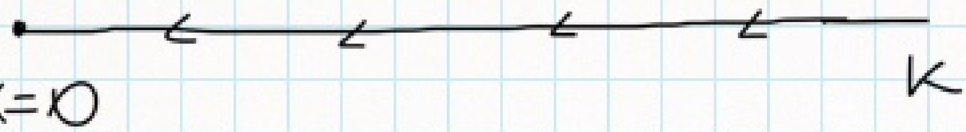
$$K' = \frac{1}{4}\ln\left[\cosh(2K+L)\cosh(2K-L)\right] - \frac{1}{2}\ln\cosh L$$

$$L' = L + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\cosh(2K+L)}{\cosh(2K-L)}\right]$$

Se $H=0$ $(L=0)$

$K' = \frac{1}{2}\ln\left[\cosh 2K\right]$. P^{tos} fixos $(K'=K=K^*)$

são $K^*=0$ $(T\to\infty)$ e $K^*=\infty$ $(T=0)$



Ising em $d=1$, $T_c=0$, $x=e^{-4K}$ e $y=e^{-2L}$

$$x' = \frac{x(1+y)^2}{x(1+y^2)+y(1+x^2)} \quad \text{e} \quad y' = y\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

Se $H=0$, $y=1$ e $x' = \frac{4x}{(1+x)^2} \to \begin{cases} x^*=0 \ (T=0) \\ x^*=1 \ (T=\infty) \end{cases}$

Linearizando em torno de $x^*=0$

$x' = 4x = 2^2 x \Rightarrow \lambda_t = 2$ e como $\lambda_t > 0$

$x^*=0$ é instável na direção x

Se $H\neq 0$ há 2 p^{tos} fixos ao longo de $x=0$ e linha de p^{tos} fixos p/ $x=1$

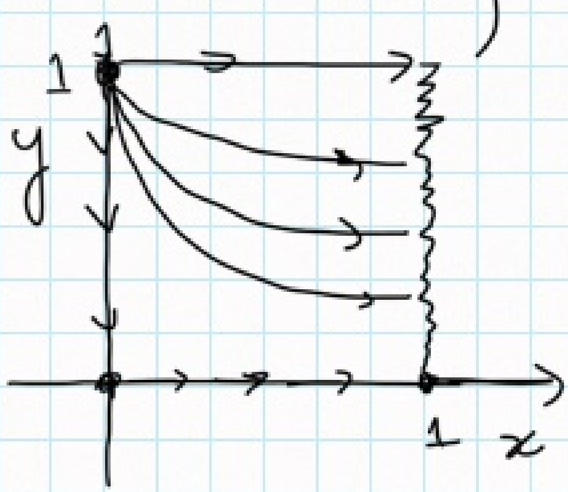
Linearizando em torno de $x^* = 0$ e $y^* = 1$

$x' = 2^2 x$ e $\Delta y' = 2\Delta y$ onde $\Delta y = y - 1$

$\Rightarrow \lambda_t = 2 > 0$ e $\lambda_H = 1 > 0 \Rightarrow (0,1) \to$ instável

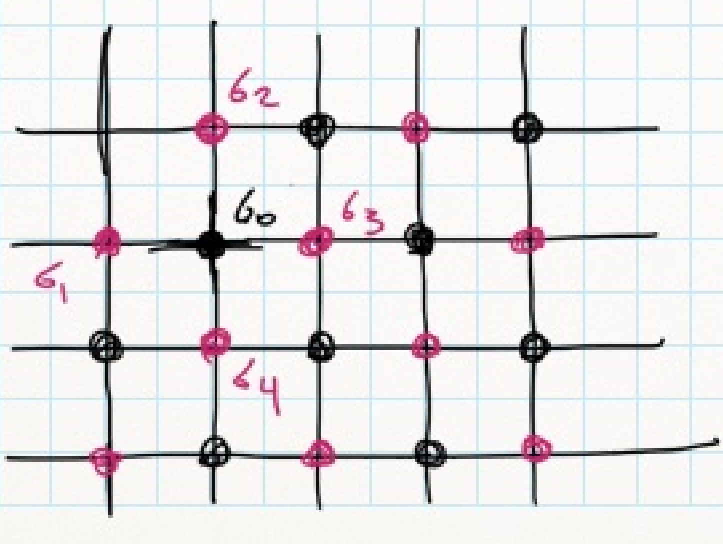
Transição em Ising em $d=1$ é artificial

(T=0)



descrição imprecisa do comportamento assintótico das grandezas termodinâmicas.

<u>Ising na rede quadrada</u>



$$\sum_{\sigma_0} \exp[K\sigma_0(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)] =$$

$$= 2\cosh[K(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)] =$$

$= A \exp[B(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_4 + \sigma_1\sigma_4) +$

$+ C(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_4) + D(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)]$

$A = 2(\cosh 2K)^{1/2}(\cosh 4K)^{1/8}$

$B = C = \frac{1}{8}\ln\cosh 4K \leftarrow$ novos 1os vizinhos

$D = \frac{1}{8}\ln\cosh 4K - \frac{1}{2}\ln\cosh 2K \leftarrow$ 4 novos spins

2ª etapa $\rightarrow$ termos mais complicados

$\Rightarrow$ aproximação de apenas 3 parâmetros

$K_1' = 2B = \frac{1}{4}\ln\cosh 4K_1 \quad (K_1 = K = \beta J)$

$K_2' = B = \frac{1}{8}\ln\cosh 4K_1$

$U' = D = \frac{1}{8}\ln\cosh 4K_1 - \frac{1}{2}\ln\cosh 2K_1$

mantendo apenas termos dominantes p/ $K = \beta J \ll 1$

$K_1' = 2K_1^2$, $K_2' = K_1^2$ e $v' = O(K_1^4)$

$\Rightarrow$ mantendo apenas 2º vizinhos poderíamos adicionar

ela interação na 1ª equação

$K_1' = 2K_1^2 + K_2$ e $K_2' = K_1^2$

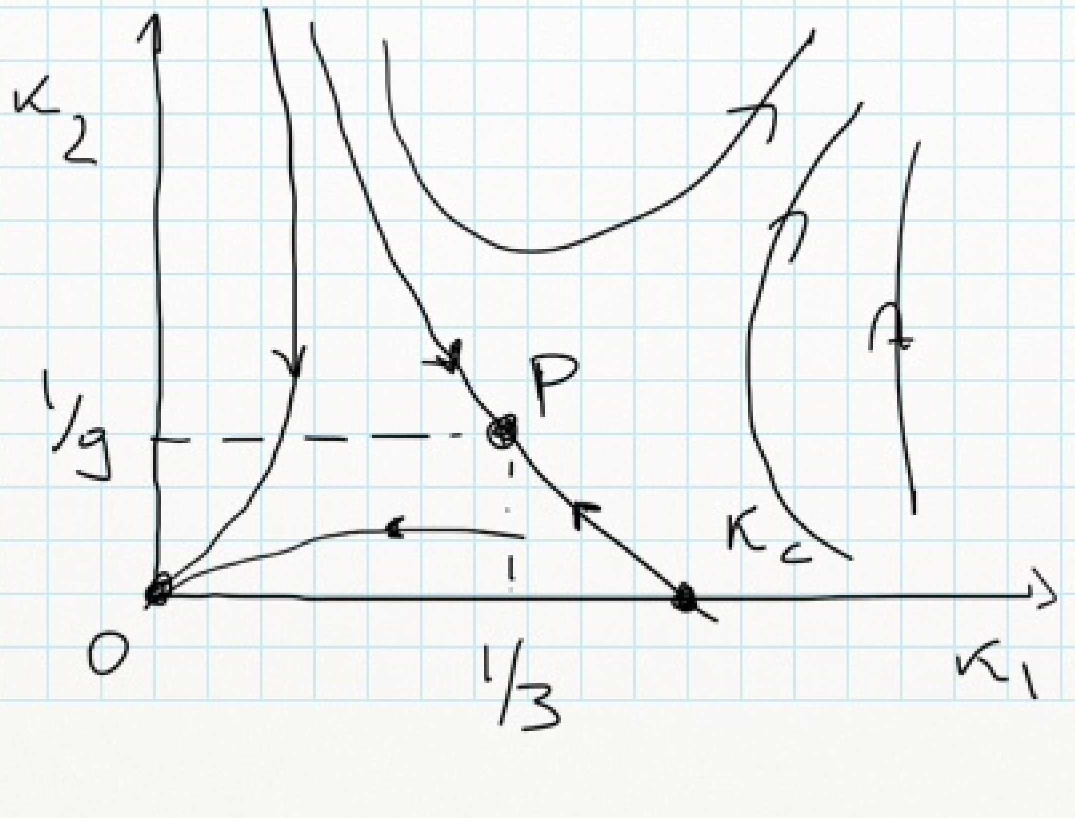
Resultados qualitativos:

P^tos fixos : $O \equiv (K_1^* = 0, K_2^* = 0)$ e $P \equiv \left(K_1^* = \frac{1}{3}, K_2^* = \frac{1}{9}\right)$.

Linearizando: $\begin{pmatrix} \Delta K_1' \\ \Delta K_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta K_1 \\ \Delta K_2 \end{pmatrix}$

onde $\Delta K_1 = K_1 - K_1^*$ e $\Delta K_2 = K_2 - K_2^*$.

Autovalores: $\Lambda_1 = \frac{2+\sqrt{10}}{3} > 1$ e $|\Lambda_2| = \left|\frac{2-\sqrt{10}}{3}\right| = 0.3874 < 1$



Esquema geral:

i) $-\beta \mathcal{H}[\sigma] = \mathcal{K}[\sigma] \to \mathcal{K}[\sigma'] : \mathcal{K}[\sigma'] = R(\mathcal{K}[\sigma])$

$Z_N\{\mathcal{K}\} = \mathrm{Tr}\, \exp(\mathcal{K}) = \mathrm{Tr}'\exp(\mathcal{K}') = Z_{N'}(\mathcal{K}')$

onde $N' = \frac{N}{b^d}$. $R \to \vec{r} \to \vec{r}\,' = \frac{\vec{r}}{b}$ $\left(\sigma \to \sigma' = \frac{\sigma}{c}\right)$

ii) Feita R:

$g\{\mathcal{K}'\} = b^d g\{\mathcal{K}\}$ e $\Gamma\{\vec{r}; \mathcal{K}\} = c^2\, \Gamma\left\{\frac{\vec{r}}{b}; \mathcal{K}'\right\}$

iii) $\mathcal{K}' = R\mathcal{K}$; $\mathcal{K}'' = R\mathcal{K}'$ ...

criticalidade: $\mathcal{K}^* = R\mathcal{K}^*$

Linearizando: $R\mathcal{K} = R(\mathcal{K}^* + Q) = \mathcal{K}^* + LQ$

L ↳ op linear

$Q = \sum h_j Q_j$ onde $L Q_j = \Lambda_j Q_j$

$\{Q_j\}$ conjunto de operadores de base

$\{h_j\}$ conjunto que parametriza $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{K}$

$\mathcal{K}' = R\mathcal{K} = \mathcal{K}^* + \sum_j h_j \Lambda_j Q_j$; onde $\Lambda_j = b^{\lambda_j}$ para preservar a propriedade de semigrupo de R.

Aplicando n vezes R : $\mathcal{K}^{(n)} = \mathcal{K}^* + \sum_j h_j b^{n\lambda_j} Q_j$

Quando $\begin{cases} \lambda_j > 0 \ , & Q_j \text{ é relevante} \\ \lambda_j < 0 \ , & Q_j \text{ é irrelevante} \\ \lambda_j = 0 \ , & Q_j \text{ é marginal} \end{cases}$

Após n interações apenas os operadores relevantes permanecem conduzindo $\mathcal{H}$ p/ longe do p.to fixo $\Rightarrow$ na criticalidade h_j que correspondem a operadores relevantes $= 0$

Diferentes p.tos fixos $\rightarrow$ diferentes classes de universalidade

Teoria de escala:

$$g(h_1 h_2 h_3 \ldots) = b^{-nd} g(b^{\lambda_1 n} h_1, b^{\lambda_2 n} h_2, b^{\lambda_3 n} h_3, \ldots) =$$

$$= h_1^{d/\lambda_1} g\left(1, \frac{h_2}{h_1^{\lambda_2/\lambda_1}}, \frac{h_3}{h_1^{\lambda_3/\lambda_1}}, \ldots\right)$$

Se $h_1 = t$ e $h_2 = H$

$\frac{d}{\lambda_1} = 2-\alpha$; $\lambda_1 > 0$

$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \Delta = \beta + \gamma > 0$ e $\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \phi$ (expoente de cruzamento)

Pto crítico usual $\lambda_3 < 0$ pois só dois são relevantes

$$\Rightarrow g(h_1, h_2, h_3 \ldots) = t^{2-\alpha} g\left(1, \frac{H}{t^{\Delta}}, 0, 0, \ldots\right)$$

Para Γ temos:

$$\Gamma(\vec{r}, t, H, h_3 \ldots) = b^{-(d-2+\eta)} \Gamma\left(\frac{\vec{r}}{b}, b^{\lambda_1} t, b^{\lambda_2} H, b^{\lambda_3} h_3, \ldots\right)$$

$$= t^{(d-2+\eta)/\lambda_1} \Gamma\left(\frac{1}{t^{-1/\lambda_1}} \vec{r}, 1, \frac{H}{t^{\lambda_2/\lambda_1}}, \frac{h_3}{t^{\lambda_3/\lambda_1}}, \ldots\right)$$

$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} = \nu$ ou $2-\alpha = \nu d$ → relação de hiperescala

Aplicação p/ Ising na rede quadrada

$$\begin{pmatrix} \Delta K_1' \\ \Delta K_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta K_1 \\ \Delta K_2 \end{pmatrix}$$

fator de redução da rede: $b = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ autovalores $\Lambda_1 = (\sqrt{2})^{\lambda_1}$ e $|\Lambda_2| = (\sqrt{2})^{\lambda_2}$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{2 \ln \Lambda_1}{\ln 2} = 1.56609\ldots \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{2 \ln |\Lambda_2|}{\ln 2} = -2.7360\ldots$$

Teoria de escala a $H=0$: $h_1 = t = (\Delta K_1)_{\Gamma\Lambda}$, $h_2 = H = 0$

$h_3 = (\Delta K_2)_{\Gamma\Lambda}$ onde $(*)_{\Gamma\Lambda}$ são combinações lineares de ΔK_1 e ΔK_2. Contribuição dos 2.^{os} vizinhos é irrelevante $\Rightarrow$ operador energia é relevante e $\alpha = 2 - \frac{d}{\lambda_1} = 2 - \frac{2}{1.566\ldots} = 0.722\ldots \neq$ Ising em $d=2$