3.1.4) Difusão de spin:

Gás de partículas com momento magnético μ que interagem através de um potencial independente de velocidade e spin. Carga das partículas = 0. Exemplo ^3He.

$$\Rightarrow M(\vec{r},t) = \mu \left[n_{(+)}(\vec{r},t) - n_{(-)}(\vec{r},t) \right]$$

$n_{(\pm)}(\vec{r},t) \rightarrow$ densidade de partículas com $(\pm)\mu$ na direção $\hat{z}$. Como não há spin flip, conservação do momento magnético total.

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_M = 0.$$

Esta eq. restringe a dinâmica de $M(\vec{r},t)$, mas para analisá-la precisamos de eq. para $M(\vec{r},t)$ apenas, ou seja, precisamos relacionar $J_M(\vec{r},t)$ e $M(\vec{r},t)$.

$$\Rightarrow J_M(\vec{r},t) = -D\vec{\nabla}M(\vec{r},t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}M - D\nabla^2 M = 0$$

se $M(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi} M(\vec{k},t)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

$\Rightarrow (\omega + iDk^2)M(\vec{k},\omega) = 0 \Rightarrow \omega = -iDk^2$ é o chamado modo difusivo. Como a relaxação ocorre via difusão $\lambda^2 \sim D\tau \Rightarrow \tau = \frac{\lambda^2}{D}$ ou $\omega \sim Dk^2$

Vamos supor que em $t=0$ temos $M(\vec{r},t) = M(\vec{r},0)$ ou $M(\vec{k},t=0)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} M(\vec{k},t) = -Dk^2 M(\vec{k},t)$$

$\Rightarrow$ T. L. dos dois lados:

$$M(\vec{k},z) = \frac{i}{z+iDk^2} M(\vec{k}, t=0)$$

Vamos estabelecer a relação com a resposta linear para uma excitação dependente do espaço, mas independente do tempo. $\Rightarrow H_1 = H - \int d^3r\, M(\vec{r}) B(\vec{r})$

$$\overline{\delta M(\vec{r})} = \int d^3r'\, \chi_M(\vec{r}-\vec{r}')\, B(\vec{r}') \quad \text{onde } \chi_M(\vec{r}-\vec{r}') \leftrightarrow \chi_{ij}$$

$$\Rightarrow \chi_M(\vec{r}-\vec{r}') = \beta \langle M(\vec{r}) M(\vec{r}')\rangle_c$$

$\overline{\delta M(\vec{k})} = \chi_M(\vec{k}) B(\vec{k})$ $\rightarrow$ componentes de Fourier são desacopladas $\Rightarrow$ generalização para $\chi_M(\vec{k},t)$

$$\overline{\delta M(\vec{k},z)} = \frac{1}{iz}\left(\frac{\chi_M(\vec{k},z)}{\chi_M} - 1\right) \overline{\delta M}(\vec{k}, t=0)$$

$$\Rightarrow \frac{i}{z+iDk^2} = \frac{1}{iz}\left(\frac{\chi_M(\vec{k},z)}{\chi_M} - 1\right)$$

ou $$\chi_M(\vec{k},z) = \frac{iDk^2}{z+iDk^2}\, \chi_M(\vec{k})$$

como $$\chi_M(\vec{k},z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''_M(k,\omega')}{\omega'-z}\, d\omega'$$

$$\chi''_M(k,\omega) = \mathrm{Im}\, \chi_M(\vec{k}, z=\omega+i\epsilon)$$

$$\Rightarrow \chi''_M(\vec{k},\omega) = \frac{\omega D k^2}{\omega^2 + D^2 k^4}\, \chi_M(\vec{k})$$

Definindo $\chi_M \equiv \chi_M(\vec{k}=0)$ temos:

$$D\chi_M = \lim_{\omega \to 0} \lim_{k \to 0} \frac{\omega}{k^2}\, \chi''_M(\vec{k},\omega)$$

que pode ser transformado em (Le Bellac ex 9.7.3)

$$D\chi_M = \frac{\beta}{3} \int_0^\infty dt \int_V d^3r\, e^{-\eta t} \langle \vec{J}_M(\vec{r},t) \cdot \vec{J}_M(\vec{0},0) \rangle_{eq}$$

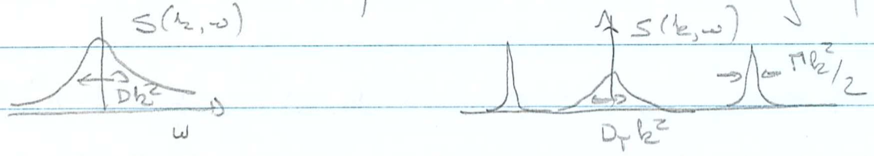
TFD (clássico) $\chi''_M(\vec{k},\omega) = \frac{\beta\omega}{2}\, C_M(\vec{k},\omega)$ e expressão para $\chi''_M(\vec{k},\omega)$ nos leva a

$$S_M(\vec{k},\omega) = C_M(\vec{k},\omega) = \frac{2}{\beta}\, \frac{D k^2}{\omega^2 + D^2 k^4}$$

onde $S_M(\vec{k},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V d^3r\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \langle M(\vec{r},t)\, M(\vec{0},0) \rangle_c$

é o fator de estrutura dinâmico. $S_M(\vec{k},\omega) = C_M(\vec{k},\omega)$ no caso clássico. Essa função é obtida através do espalhamento de neutrons pois é proporcional à seção de choque dos neutrons pelo fluido magnético.

No caso do espalhamento de luz por líquidos



/ /

3.2) Teoria quântica

$$\hat{\rho}_B \equiv \hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{\lambda_i \hat{A}_i} \qquad Z = \mathrm{Tr}\, e^{\lambda_i \hat{A}_i}$$

Seja $\hat{B}$ um observável $\hat{B} = \hat{A}_i$ ou não

$$\langle \hat{B} \rangle_\rho = \mathrm{Tr}\, \hat{B}\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \mathrm{Tr}\, \hat{B} e^{\lambda_i \hat{A}_i}$$

$$\frac{\partial \langle \hat{B} \rangle_\rho}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \mathrm{Tr}\, \hat{B} e^{\lambda_j \hat{A}_j} - \frac{1}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial \lambda_i} \mathrm{Tr}\, \hat{B} e^{\lambda_j \hat{A}_j}$$

$$= \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \mathrm{Tr}\left(B e^{\lambda_j \hat{A}_j} \right) - \langle \hat{A}_i \rangle_\rho \langle \hat{B} \rangle_\rho$$

Vamos usar que $\dfrac{\partial e^{\hat{A}(\alpha)}}{\partial \alpha} = \displaystyle\int_0^1 dx\, e^{x \hat{A}(\alpha)} \frac{\partial \hat{A}(\alpha)}{\partial \alpha} e^{(1-x)\hat{A}(\alpha)}$

(Le Bellac 2.120)

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \mathrm{Tr}\left(\hat{B} e^{\sum \lambda_j \hat{A}_j} \right) = \int_0^1 dx\, \mathrm{Tr}\left(\hat{B} e^{\sum x \lambda_j \hat{A}_j} \hat{A}_i e^{\sum (1-x) \lambda_j \hat{A}_j} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \langle \hat{B} \rangle_\rho}{\partial \lambda_i} = \int_0^1 dx\, \mathrm{Tr}\left[\delta\hat{B}\, \hat{\rho}^{x}\, \delta\hat{A}_i\, \hat{\rho}^{1-x} \right]$$

onde $\delta\hat{B} = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle_\rho$ e $\delta\hat{A}_i = \hat{A}_i - \langle \hat{A}_i \rangle_\rho$

Definição: Produto escalar de Mori (ex 9.7.4)

$$\langle \hat{B} ; \hat{A} \rangle_\rho = \int_0^1 dx\, \mathrm{Tr}\left(\hat{B} \rho^{x} \hat{A}^{+} \rho^{1-x} \right)$$

$$\langle \hat{B} ; \hat{A} \rangle_\rho^{*} = \langle \hat{A} ; \hat{B} \rangle_\rho \quad \text{e} \quad \langle B ; A \rangle_\rho^{(cl)} = \langle B A^{*} \rangle_\rho$$

Sulamericana

Exercício (2.7.8) Le Bellac.

$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ e em geral $e^{A+B} \neq e^A e^B$

e $e^A e^B \neq e^B e^A$. Igualdade $\Leftrightarrow [A,B]=0$.

Considere o operador $K(x) = e^{x(A+B)} e^{-xA}$

$$\frac{dK}{dx} = (A+B)e^{x(A+B)} e^{-xA} - e^{x(A+B)} A e^{-xA}$$

$$= (A+B)e^{x(A+B)} e^{-xA} - e^{x(A+B)} e^{-xA} A$$

$$= e^{x(A+B)} (A+B) e^{-xA} - e^{x(A+B)} e^{-xA} A$$

$$= e^{x(A+B)} \cancel{e^{-xA}} A + e^{x(A+B)} B e^{-xA} - e^{x(A+B)} \cancel{e^{-xA}} A$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dx} = e^{x(A+B)} B e^{-xA}$$

$$\Rightarrow K(1) - K(0) = \int_0^1 e^{x(A+B)} B e^{-xA} dx$$

$$\Rightarrow e^{A+B} e^{-A} - 1 = \int_0^1 e^{x(A+B)} B e^{-xA} dx \qquad (*e^A)$$

$$\Rightarrow e^{A+B} = e^A + \int_0^1 e^{x(A+B)} B e^{(1-x)A} dx.$$

$\Rightarrow$ se $\lambda \to 0$ podemos escrever

$$e^{A+\lambda B} = e^A + \int_0^1 e^{x(A+\lambda B)} \lambda B e^{(1-x)A} dx.$$

$$\simeq e^A + \lambda \int_0^1 e^{xA} B e^{(1-x)A} dx + O(\lambda^2)$$

Ou seja:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{e^{A+\lambda B} - e^{A}}{\lambda} = \int_0^1 e^{xA} B e^{(1-x)A} dx.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda} e^{A(\lambda)} = \int_0^1 e^{xA} \frac{dA}{d\lambda} e^{(1-x)A} dx.$$

porque $A(\lambda + \Delta\lambda) = A(\lambda) + \frac{dA}{d\lambda}\Delta\lambda + \mathcal{O}[(\Delta\lambda)^2]$