/ /

Porém, convém notar que $\langle \omega^{(n)}(k) \rangle$, $n \geq 4$ ainda diverge $\Rightarrow$ memória arbitrária $D(t)$.

$$\chi(\vec{k}, z) = \frac{i k^2 D(z)}{z + i k^2 D(z)} \quad \text{onde} \quad D(z) = \int_0^\infty e^{izt} D(t)\, dt \quad (\mathrm{Im}\, z > 0)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D'(\omega)\, d\omega}{\omega - z} \quad \text{onde} \quad D(t) \text{ e } D'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} D(t)$$

Como $D(t) = D(-t)$ e $D(t) \in \mathbb{R}$ podemos mostrar que $D'(\omega) = D'^*(+\omega) = D'(-\omega) \Rightarrow D'(\omega) = D'(-\omega)$ e $D'(\omega) \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \chi''(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega k^2 D'(\omega)/2}{\left[\omega + k^2 \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{D'(\omega')}{\omega' - \omega}\right]^2 + \left[\frac{k^2 D'(\omega)}{2}\right]^2}$$

Como $\omega \chi''(\omega) \geq 0$ Temos $D'(\omega) \geq 0$!

Expandindo $\chi(\vec{k}, z)$ em potências de $1/z$ pode-se determinar os $\langle \omega^{(n)} \rangle$. Em particular,

$$\frac{1}{\chi} \int \frac{d\omega}{\pi}\, \omega\, \chi''(\vec{k}, \omega) = k^2 \int \frac{d\omega}{\pi} D'(\omega)$$

$$\text{ou} \quad D(t=0) = \int \frac{d\omega}{2\pi} D'(\omega) = \frac{n\mu^2}{m\chi}$$

$\Rightarrow$ esta regra de soma fixa $D(t=0)$.

Para ter momentos $\langle \omega^{(n)} \rangle$ finitos podemos estabelecer uma memória gaussiana:

$$D(t) = \frac{n\mu^2}{m\chi} e^{-\pi \left(\frac{t}{2\tau}\right)^2} \quad \text{ou} \quad D'(\omega) = \frac{n\mu^2}{m\chi} (2\tau)\, e^{-(\omega\tau)^2/\pi}$$

Para tempos longos:

$$D = \lim_{z \to 0} D(z) = \int_0^\infty dt\, D(t) = \frac{1}{2} \lim_{\omega \to 0} D'(\omega)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{D(t=0)} \int_0^\infty dt\, D(t).$$ Como $D'(\omega) \geq 0$ Temos $|D(t)| \leq D(t=0)$

Como $D'(\omega) \geq 0$ Temos

$$D(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} D'(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega \Rightarrow |D(t)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |D'(\omega)|\, d\omega$$

$\Rightarrow |D(t)| = D(t) \leq D(t=0) \Rightarrow$ perda de memória à medida que o tempo passa é um fenômeno geral na natureza.

Representação de relações de dispersão:
Em geral

$$\vec{J}_M(\vec{r},t) = -\int_0^t dt' \int d^3r'\, D(\vec{r}-\vec{r}', t-t')\, \vec{\nabla}' M(\vec{r}',t')$$

$$\Rightarrow \chi(\vec{k},z) = \frac{ik^2 D(\vec{k},z)}{z + ik^2 D(\vec{k},z)} \qquad \chi(\vec{k})$$

onde $D'(\vec{k},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r\, e^{i\omega t}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, D(\vec{r},t)$

e $D(\vec{k},z) = \int \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{D'(\vec{k},\omega)}{\omega - z}$

$D'(\vec{k},\omega) \in \mathbb{R}$ $\quad D'(\vec{k},\omega) = D'(\vec{k},-\omega)$ e $D'(\vec{k},\omega) = D(k,\omega)$; $k = |\vec{k}|$

$z = \omega + i\epsilon$ em $\chi(k,z)$

$$\chi''(k,\omega) = \frac{\omega k^2 D(k,\omega)/2}{\left(\omega + \omega k^2 \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{D'(k,\omega)}{\omega'^2 - \omega^2}\right)^2 + \frac{k^2 D'(k\omega)}{2}}$$

Expressão para $\chi(k,z)$ em função de $D(k,z)$ define $D(k,z)$ como (inversão)

$$D(k,z) = \frac{iz\chi(k,z)/k^2}{[\chi(k,z) - \chi(k)]}$$

Para que as representações de $D(k,z)$ façam sentido temos que mostrar que $D(k,z)$ é analítica para $\operatorname{Im} z \neq 0$. Sabemos que $\chi(k,z)$ é analítica exceto ao longo do eixo real, então, só podemos ter problemas no denominador se

$$\frac{1}{iz}\left[\chi(k,z) - \chi(k)\right] = \int \frac{d\omega}{\pi i} \frac{\chi''(k,\omega)}{\omega(\omega - z)} = 0$$

para z fora do eixo real. Mas se $z = x + iy$

$$\int \frac{d\omega}{\pi i} \frac{\chi''(k,\omega)}{\omega(\omega - x - iy)} = \int \frac{d\omega}{\pi} \frac{\chi''(k,\omega)}{\omega} \frac{y}{(\omega-x)^2+y^2}$$
$$- i \int \frac{d\omega}{\pi} \frac{\chi''(k,\omega)}{\omega} \frac{(\omega - x)}{(\omega-x)^2+y^2}$$

$\Rightarrow$ se $y \neq 0$ a parte real da expressão é sempre > 0 !

Utilidade de trabalhar com D ao invés de χ.
Na representação de relações de dispersão substituímos a possível complexidade de $\chi''(k,\omega)$ p/ $k,\omega \to 0$ pelo bom comportamento de $D(k,\omega)$ pois

$$\frac{D'(0,0)}{2} = D \Rightarrow \text{constante de difusão.}$$

Vamos recuperar a hidrodinâmica da expressão geral

$$\frac{1}{iz\beta}\left[\chi(kz)-\chi(k)\right] \equiv C(kz) = \frac{i\beta^{-1}\chi(k)}{z+ik^2 D(kz)}$$

$\Rightarrow$ polo em $z=0$ para $k=0$

para $k\neq 0$ o polo migra p/ a metade inferior do plano complexo para $z=z_0(k)$ que é solução de

$$z_0 + ik^2 D(k, z_0) = 0$$

Se $z \simeq z_0$ podemos expandir $D(k,z)$ em torno de z_0 $\Rightarrow$

$$z + ik^2 D(kz) = (z-z_0) + z_0 + ik^2 D(kz_0) + ik^2 \frac{dD}{dz_0}(z-z_0)$$

$+ \ldots$

$$\Rightarrow \text{denominador} = (z-z_0)\left[1 + ik^2 \frac{dD}{dz_0}\right]$$

$$\Rightarrow C(kz) = i\beta^{-1}\chi(k)\frac{Z(k)}{z-z_0(k)} \quad \text{onde}$$

$$Z^{-1}(k) = 1 + ik^2 \frac{dD(kz_0)}{dz_0}$$

$\Rightarrow$ até $O(k^2)$ $\quad z_0(k) = -ik^2 D(0,0)$ e $Z(k)=1$ que é o resultado difusivo (hidrodinâmico)

Há ainda a possibilidade de tratarmos a aproximação de alta freqüência. Para tal podemos substituir $D(k,t)$ por $D(k,t=0)$ ou $D(k,z) = \frac{i}{z} D(k) + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$

mas $D(k) = \int \frac{d\omega}{2\pi} D'(k,\omega) = \frac{\chi^{-1}(k)}{k^2} \int \frac{d\omega}{\pi} \omega \chi''(k,\omega)$

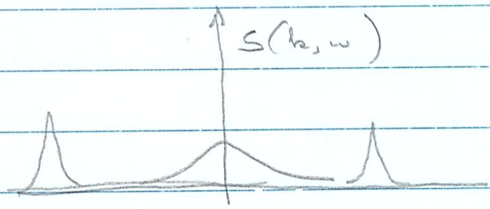
$= \frac{n\mu^2}{m\chi(k)}$ como vimos antes

$\Rightarrow \chi(k,z) = \frac{-k^2 D(k)}{z^2 - k^2 D(k)} \chi(k)$

$z = \omega + i\epsilon$ $\qquad \chi(k,\omega) = - \frac{k^2 D(k) \chi(k)}{\omega^2 - k^2 D(k)}$

$\Rightarrow \omega = \pm ck \; ; \; c^2 = \lim_{k \to 0} D(k) = \lim_{k \to 0} \frac{\langle \omega^{(2)}(k) \rangle}{k^2}$

$= \frac{n\mu^2}{m\chi}$



$\Rightarrow$ resposta a baixas freqüências é difusiva enquanto é elástica a altas freqüências. mergulhar rápido ou devagar $\to$ mudança aparente do comportamento do líquido.