23.5) Coeficientes de Transporte

Como vimos, se χ é uma quantidade conservada numa colisão; $\chi(\vec{r},\vec{p}_1)+\chi(\vec{r},\vec{p}_2)=\chi(\vec{r},\vec{p}_3)+\chi(\vec{r},\vec{p}_4)$ tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n\chi\rangle+\frac{\partial}{\partial x_i}\langle n v_i \chi\rangle - n\left\langle v_i \frac{\partial \chi}{\partial x_i}\right\rangle - \frac{n}{m}\left\langle F_i \frac{\partial \chi}{\partial v_i}\right\rangle$$

$$-\frac{n}{m}\left\langle \frac{\partial F_i}{\partial v_i}\chi\right\rangle = 0 \quad ;$$

Como $n=n(\vec{r},t)$, $\langle n\chi\rangle = n\langle \chi\rangle$.

Três casos analisados: $(\vec{u}(\vec{r},t)\equiv\langle\vec{v}\rangle)$

i) $\chi = m \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})=0$

$\rho\vec{u}=\vec{J}$

ii) $\chi = m v_i \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial}{\partial t}\langle\rho v_i\rangle+\dfrac{\partial}{\partial x_i}\langle \rho v_i v_j\rangle$

$-\dfrac{\rho}{m}F_i = 0.$

Usando que $\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$ temos $\langle v_i v_j\rangle = \langle w_i w_j\rangle + u_i u_j$. Aqui $\vec{w}=\vec{w}(\vec{r},t)$ e $\langle w\rangle = 0$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\frac{\rho}{m}F_i-\frac{\partial}{\partial x_j}\langle\rho w_i w_j\rangle$$

Mas $\rho\langle w_i w_j\rangle = P_{ij}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t}+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)u_i=\frac{F_i}{m}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}P_{ij}$$

iii) $\chi = \frac{1}{2} m \vec{w}^2 = \frac{1}{2} m (\vec{v} - \vec{u})^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho w^2 \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \rho v_i w^2 \rangle$$

$$- \frac{1}{2} \rho \left\langle v_i \frac{\partial}{\partial x_i} w^2 \right\rangle = 0$$

$\Rightarrow$ se $k_B T \equiv \theta(\vec{r}, t) \Rightarrow \theta = \frac{1}{3} m \langle w^2 \rangle$

e $\vec{J}_E \equiv \vec{q} = \frac{1}{2} m \rho \langle \vec{w} w^2 \rangle$, Temos

$$\frac{1}{2} m \rho \langle v_i w^2 \rangle = q_i + \frac{3}{2} \rho \theta u_i$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} w^2 = 2 \vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial x_i} = 2 \vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} = 2 w_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho \left\langle v_i \frac{\partial}{\partial x_i} w^2 \right\rangle = \rho \langle v_i w_j \rangle \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Mas $\rho \langle v_i w_j \rangle = \rho \langle v_i (v_j - u_j) \rangle = \rho \langle w_i w_j \rangle + \rho u_i \cancel{\langle w_j \rangle}^{0}$

$= P_{ij}$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \theta) + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \theta u_i) + m P_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0$$

Como $P_{ij} = P_{ji}$; $m P_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = P_{ij} \underbrace{\frac{m}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}_{\Lambda_{ij}}$

$= P_{ij} \Lambda_{ij}$

$$\Rightarrow \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \theta + \frac{2}{3} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = - \frac{2}{3} \Lambda_{ij} P_{ij}$$

Leis de conservação:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} = \frac{\rho}{m}\vec{F} - \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{P}$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\Theta = -\frac{2}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{q} - \frac{2}{3}\overleftrightarrow{P}\cdot\overleftrightarrow{\Lambda}$$

$$\rho(\vec{r},t) = m\int d^3v\, f(\vec{r},\vec{v},t) \qquad \vec{u}(\vec{r},t) = \langle\vec{v}(\vec{r},t)\rangle$$

$$\Theta(\vec{r},t) = \frac{1}{3}m\langle w^2(\vec{r},t)\rangle \qquad \vec{q}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}m\rho\langle\vec{w}\,w^2\rangle$$

$$P_{ij} = \rho\langle w_i w_j\rangle \qquad \Lambda_{ij} = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad \vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$$

i) Aproximação de ordem zero.

$$f(\vec{r},\vec{p},t) = f^{(0)}(\vec{r},\vec{p},t) \quad ; \quad f^{(0)} = \frac{n}{(2\pi m\Theta)^{3/2}}\, e^{-\frac{m}{2\Theta}w^2}$$

$\Rightarrow \mathscr{C}[f^{(0)}] = 0$. Mas

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}_r + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_p\right)f^{(0)}(\vec{r},\vec{p},t) \neq 0$$

Se $f^{(0)}$ é uma boa aproximação temos eq. acima $\approx 0 \Rightarrow$ leis de conservação são obedecidas e restringem o comportamento de n, Θ e $\vec{u}$

Fazendo $C(\vec{r},t) = n\left(\frac{m}{2\pi\Theta}\right)^{3/2}$ e $A(\vec{r},t) = \frac{m}{2\Theta}$ temos:

$$\vec{q}^{(0)} = \frac{1}{2}\frac{m\rho}{n}\int d^3v\, (\vec{v}-\vec{u})(\vec{v}-\vec{u})^2\, c(\vec{r},t)\, e^{-A(\vec{v}-\vec{u})^2}$$

$$= \frac{m^2}{2} C \int d^3w\, \vec{w}\, w^2\, e^{-Aw^2} = 0 \; //$$

$$P_{ij}^{(0)} = mC\int d^3w\, w_i w_j\, e^{-Aw^2} = \delta_{ij} P$$

onde

$$P = \frac{\rho}{3}\left(\frac{m}{2\pi\Theta}\right)^{3/2}\int d^3w\, w^2 e^{-Aw^2} = n\Theta$$

ou $PV = Nk_BT \Rightarrow P =$ pressão hidrostática.

$$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} + \frac{\vec{\nabla}P}{\rho} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad \text{(eq. Euler)}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\Theta + \frac{1}{c_v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\Theta = 0 \qquad \text{onde } c_v = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ padrão de escoamento persiste indefinidamente (hidrodinâmica ñ-viscosa) e $f^{(0)}$ não decai para $f_{M.B.}$ o que concorda aproximadamente c/ a experiência pois um escoamento hidrodinâmico demora muito para relaxar.

Usando que $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}$ temos

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$$

$$-\frac{3}{2}\frac{\rho}{\Theta}\frac{d\Theta}{dt} = \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$$

S3

que somadas nos levam a:

$$\frac{d\rho}{dt} - \frac{3}{2}\frac{\rho}{\Theta}\frac{d\Theta}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\rho\,\Theta^{-3/2}\right) = 0$$

Mas $P = \frac{\rho}{m}\Theta \Rightarrow P\rho^{-5/3} = \text{const.}$ (ao longo de uma linha de escoamento)

$\Rightarrow PV^{\gamma} = \text{const}$ $\quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$. $\quad \rho = nm$ $\Rightarrow$ processo adiabático ao longo da linha.

Outra eq. importante pode ser obtida se fizermos $\vec{u}$ e variações de $\vec{u}$, n e Θ muito pequenos. Então, até 1ª ordem nestas grandezas:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}P = 0$$

$\frac{3}{2}\rho\frac{\partial\Theta}{\partial t} - \Theta\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (que é a mesma que $PV^{\gamma} = \text{const}$)

Tomando $\vec{\nabla}\cdot$ da 1ª e $\partial/\partial t$ da 2ª e subtraindo:

$$\nabla^2 P - \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = 0$$

Mas $\nabla^2 P = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}P$ e $P = P(\rho)$

$$\Rightarrow \nabla^2 P = \vec{\nabla}\cdot\left(\left.\frac{\partial P}{\partial\rho}\right|_s \vec{\nabla}\rho\right) = \left.\frac{\partial P}{\partial\rho}\right|_s \nabla^2\rho$$

Como $\kappa_s = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P}\Big|_s = \frac{3}{5}\frac{m}{\rho\Theta}$

$\Rightarrow \nabla^2 P - \rho\kappa_s \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$ com $c = \frac{1}{\sqrt{\rho\kappa_s}} =$

$= \sqrt{\frac{5}{3}\frac{\Theta}{m}} = \sqrt{\frac{5}{6}}\,\bar{v}$

Para terminar vamos considerar o escoamento sob influência de uma força conservativa e $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$
$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$

Então, usando que $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(u^2) - \vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u})$

temos $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{P}{\rho} + \frac{\phi}{m}\right) = \vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u}) - \frac{\Theta}{m}\frac{\vec{\nabla}\rho}{\rho}$

Se $\rho = $ const. e $\vec{\nabla}\times\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \frac{\phi}{m}\right) = 0$

que é a eq. de Bernoulli.

Se $\vec{\nabla}\Theta = 0$ e $\vec{\nabla}\times\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{\phi}{m}\right) = -\frac{\Theta}{m}\vec{\nabla}(\ln\rho)$

$\Rightarrow \rho = \rho_0\, e^{-\left(\frac{1}{2}mu^2 + \phi\right)\frac{1}{\Theta}}$.

Aproximação em 1ª ordem:

$$\bar{f}(\vec{r},\vec{p},t) = f(\vec{r},\vec{p},t) - f^{(0)}(\vec{r},\vec{p},t)$$

$$\mathcal{C}[f] = \int d^3p_2\, d^3p_3\, d^3p_4\; w(\vec{p}_1\vec{p}_2;\vec{p}_3 p_4)\,(f_3f_4 - f_1f_2)$$

$$\approx \int d^3p_2\, d^3p_3\, d^3p_4\; w(\vec{p}_1\vec{p}_2;\vec{p}_3 p_4)\,(f_3^{(0)}\bar{f}_4 + f_4^{(0)}\bar{f}_3 -$$

$$f_1^{(0)}\bar{f}_2 - f_2^{(0)}\bar{f}_1) \quad \text{desprezando } \bar{f}\bar{f}$$

Ordem de grandeza: $-\bar{f}(\vec{r},\vec{p}_1,t)\int d^3p_2\, \sigma_{tot}\,|\vec{v}_2-\vec{v}_1|\, f_2^{(0)}$

$= -\bar{f}(\vec{r},\vec{p}_1,t)/\tau$ ou

$$\mathcal{C}[f] \approx -\frac{f-f^{(0)}}{\tau}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}_r + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_p\right)(f^{(0)}+\bar{f}) \approx -\frac{\bar{f}}{\tau}$$

Assumindo $\bar{f} \ll f^{(0)}$ podemos desprezar $(\;)\bar{f}$ $\Rightarrow$

Estimativa: $\bar{v}\,\dfrac{f^{(0)}}{L} \approx -\dfrac{\bar{f}}{\tau} \Rightarrow \dfrac{\bar{f}}{f^{(0)}} \approx -\dfrac{\lambda}{L}$

λ - livre caminho médio

L - variações macroscópicas características

$$\Rightarrow \bar{f} = -\tau\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}_r + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_p\right) f^{(0)}$$

Como f depende de $\vec{r}$ e t através de $\rho(\vec{r},t)$, $\theta(\vec{r},t)$ e $\vec{u}(\vec{r},t)$ temos:

$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \rho} = \frac{f^{(0)}}{\rho}$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{m}{2\theta} w^2 - \frac{3}{2}\right) f^{(0)}$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial u_i} = \frac{m}{\theta} w_i f^{(0)}$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_i} = -\frac{m}{\theta} w_i f^{(0)}$$

$$\bar{f} = -\tau\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}_r + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_p\right) f^{(0)}$$

$$= -\tau f^{(0)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\theta}\left(\frac{m}{2\theta} w^2 - \frac{3}{2}\right)\frac{d\theta}{dt} + \right.$$

$$\left. + \frac{m}{\theta} w_j \frac{du_j}{dt} - \frac{\vec{F}\cdot\vec{w}}{\theta}\right]$$

lembrando que $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial x}{\partial t} + v_i \dfrac{\partial x}{\partial x_i}$

As eq^s hidrodinâmicas podem ser reescritas como

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + \vec{w}\cdot\vec{\nabla}\rho$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2}{3}\theta\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \vec{w}\cdot\vec{\nabla}\theta$$

$$\frac{du_j}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{F_j}{m} + w_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

onde $P = \dfrac{\rho\,\theta}{m}$

Substituindo as 3 últimas na eq. para $\bar{f}$

tem-se, após rearranjos e cancelamentos.

$$\bar{f} = -\tau\left[\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x_i} w_i\left(\frac{m}{2\theta}w^2 - \frac{5}{2}\right) + \frac{\Lambda_{ij}}{\theta}\left(w_i w_j - \frac{\delta_{ij} w^2}{3}\right)\right] f^{(0)}$$

que poderemos usar no cálculo de $\vec{q}$ e P_{ij}

i) $\vec{q} = \frac{m\rho}{2n}\int d^3p\, \vec{w}\, w^2 \bar{f}$

$$= -\frac{\tau m^5}{2}\int d^3w\, \vec{w}\, w^2\left(\frac{m}{2\theta} - \frac{5}{2}\right)\frac{1}{\theta} w_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i} f^{(0)}$$

ou $\vec{q} = -K\vec{\nabla}\theta$

onde $K = \frac{m^5\tau}{6\theta}\int d^3w\, w^4\left(\frac{m}{2\theta}w^2 - \frac{5}{2}\right) f^{(0)} = \frac{5}{2}\tau\theta n$

é o coeficiente de condutividade térmica.

ii) $P_{ij} = \frac{\rho}{n}\int d^3p\, w_i w_j\left(f^{(0)} + \bar{f}\right) = \delta_{ij} P + P'_{ij}$

$$P'_{ij} = -\frac{\tau\rho m}{n\theta}\Lambda_{kl}\int d^3w\, w_i w_j\left(w_k w_l - \frac{1}{3}\delta_{kl} w^2\right) f^{(0)}$$

$$= -\frac{2\eta}{m}\left(\Lambda_{ij} - \frac{m}{3}\delta_{ij}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)$$

onde $\eta = \frac{\tau m^5}{\theta}\int d^3w\, w_i^2 w_j^2 f^{(0)} = \tau n\theta$

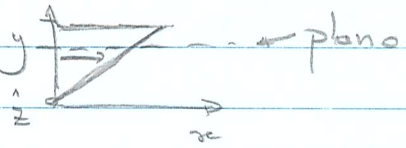
$$\Rightarrow P_{ij} = \delta_{ij} P - \frac{2\eta}{m}\left(\Lambda_{ij} - \frac{m}{3}\delta_{ij}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)$$

Interpretação de η: viscosidade.

Considere um gás com perfil de velocidades

$u_x = A + By$

$u_y = u_z = 0$



$$F' = -\mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Mas F' = valor líquido da componente x do momento linear transportado por segundo através da unidade de área na direção y.

$\Rightarrow$ quantidade transportada $m(v_x - u_x)$ e o fluxo é $n(v_y - u_y)$

$$\Rightarrow F' = nm\langle (v_x - u_x)(v_y - u_y)\rangle =$$

$$= m^4 \int d^3v\, (v_x - u_x)(v_y - u_y)(f^{(0)} + \bar{f})$$

Como $f^{(0)}$ não contribui temos que usar apenas $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r f^{(0)} = -\frac{\bar{f}}{\tau}$.

$$\Rightarrow \bar{f} = -\frac{\tau m}{\Theta} v_y (v_x - u_x) B f^{(0)} = -\frac{m\tau}{\Theta} w_y w_x \frac{\partial u_x}{\partial y} f^{(0)}$$

$$\Rightarrow F' = -\frac{\partial u_x}{\partial y} \underbrace{\frac{\tau m^5}{\Theta} \int d^3w\, w_x^2 w_y^2 f^{(0)}}_{\text{mesmo } \eta \text{ da página anterior}}$$

Hidrodinâmica viscosa:

Agora devemos substituir $\vec{q}$ e P_{ij} nas leis de conservação. Para tal devemos calcular

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{q} = -\vec{\nabla}(\kappa\vec{\nabla}\Theta) = -\kappa\nabla^2\Theta - \vec{\nabla}\kappa\cdot\vec{\nabla}\Theta$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial x_i} - \eta\left[\nabla^2 u_i + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\right] - \frac{2}{m}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\Lambda_{ij} - \frac{m}{3}\delta_{ij}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)$$

$$P_{ij}\Lambda_{ij} = mP(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \frac{2\eta}{m}\Lambda_{ij}\Lambda_{ij} + \frac{2}{3}\eta m(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})^2$$

Pode-se mostrar que

$$\Lambda_{ij}\Lambda_{ij} = \frac{m^2}{2}\left[\nabla^2(u^2) - 2\vec{u}\cdot\nabla^2\vec{u} - |\vec{\nabla}\times\vec{u}|^2\right]$$

Então:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{\nabla}\left(P - \frac{\eta}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) + \eta\nabla^2\vec{u} + \vec{R}$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\Theta = \frac{\kappa}{c_v}\nabla^2\Theta + \frac{1}{c_v}\vec{\nabla}\kappa\cdot\vec{\nabla}\Theta - \frac{1}{c_v}\left[mP(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + \frac{2}{3}\eta m(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})^2 - \eta m\left\{\nabla^2(u^2) - 2\vec{u}\cdot\nabla^2\vec{u} - |\vec{\nabla}\times\vec{u}|^2\right\}\right]$$

onde $c_v = \frac{3}{2}$ e

$$R_i = \frac{2}{m}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\left(\Lambda_{ij} - \frac{m}{3}\delta_{ij}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)$$

As correções em 1ª ordem são η, κ, $\vec{u}$ e derivadas de ρ, θ e $\vec{u}$ $\Rightarrow$ até 1ª ordem nestes parâmetros ou funções temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} = \frac{\vec{F}}{m} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\left(p - \frac{\eta}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{u}$$

(Navier - Stokes)

e

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\theta = -\frac{1}{c_v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\theta + \frac{\kappa}{\rho c_v}\nabla^2\theta$$

(eq. da condução de calor)

com $c_v = 3/2$.

Se $\vec{u} = 0$ a eq. da condução de calor fica:

$$\rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} - \kappa\vec{\nabla}^2\theta = 0$$

que é a eq. de difusão de calor que deduzimos anteriormente através de
$\vec{q} = -\kappa\vec{\nabla}\theta$.

Como já vimos antes os coeficientes de transporte são fundamentais na produção de entropia, o que agora ocorre em uma escala de tempo mais longa que o do teorema H de Boltzmann.