IV) Momento Angular e Rotações

IV.1) Teoria Geral

Como vimos na seção onde abordamos simetrias, o operador que executa a rotação do estado físico $|\psi\rangle$ de um ângulo θ em torno de um eixo $\hat{\mathbf{n}}$ é o operador unitário $U_R(\theta) = \exp -\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L})\theta$ onde $\mathbf{L}$ é o operador hermitiano $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Apesar de $[\mathbf{r}, \mathbf{p}] \neq 0$ este operador não apresenta ambiguidades na correspondência $\mathbf{r} \to \mathbf{r}$ e $\mathbf{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$, o que nos permite definí-lo como o operador quântico de momento angular. As regras de comutação das diferentes componentes de $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ podem ser deduzidas imediatamente, já que conhecemos as regras de comutação entre as diferentes componentes de $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$; por exemplo

$$\begin{aligned}
[L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y,\ zp_x - xp_z] \\
&= y[p_z, z]p_x + [z, p_z]p_y x \\
&= -i\hbar y p_x + i\hbar x p_y \\
&= i\hbar L_z
\end{aligned}$$

Analogamente podemos mostrar que $[L_y, L_z] = i\hbar L_y$ e $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$ o que nos permite escrever de forma mais compacta $[L_\alpha, L_\beta] = i\hbar \sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma$ onde

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha\beta\gamma = xyz,\ zxy \text{ ou } yzx \\ -1 & \text{se } \alpha\beta\gamma = yxz,\ zyx \text{ ou } xzy \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Estas relações nos mostram claramente que as 3 componentes do momento angular de uma partícula não podem ser determinadas simultaneamente. Ao medirmos as componentes L_y e L_z, por exemplo, a outra componente, L_x, fica totalmente indeterminada.

Entretanto, convencionalmente, estuda-se uma das componentes de $\mathbf{L}$ (L_z) e o módulo quadrado de $\mathbf{L}$; L^2. Podemos facilmente mostrar que $\left[L_z, L^2\right] = 0$ pois

$$\begin{aligned}
\left[L_z, L^2\right] &= \left[L_z, L_x^2 + L_y^2 + L_z^2\right] \\
&= [L_z, L_x]L_x + L_x[L_z, L_x] + [L_z, L_y]L_y + L_y[L_z, L_y] \\
&= -i\hbar L_y L_x + i\hbar L_x L_y - i\hbar L_x L_y + i\hbar L_y L_x \\
&= 0
\end{aligned}$$

Consequentemente L_z e L^2 possuem auto estados simultâneos.

Este fato é de importância fundamental para a diagonalização de hamiltonianas invariantes por rotações, que é o caso quando estamos lidando com potenciais esfericamente simétricos. Nesta situação podemos obter informações sobre os auto estados de H através da determinação dos auto estados de L^2 e L_z pois

$$[H, \mathbf{L}] = 0 \Rightarrow [H, L_z] = 0 \text{ e } \left[H, L^2\right] = 0$$

No caso de um sistema de N partículas o momento angular total é dado por

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_i$$

onde devemos entender $\mathbf{L}_i$ como $\mathbb{1}(1) \otimes \mathbb{1}(2) \otimes \ldots \otimes \mathbf{L}(i) \otimes \ldots \otimes \mathbb{1}(N)$ pois $|\psi\rangle = |\psi(1)\rangle \otimes |\psi(2)\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi(N)\rangle$ e, então,

$$\begin{aligned}
U_R(\theta) &= \exp -\frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\sum_i \mathbf{L}_i\right)\theta \\
&= U_R^{(1)}(\theta) \otimes U_R^{(2)}(\theta) \otimes \ldots \otimes U_R^{(N)}(\theta)
\end{aligned}$$

já que $[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = 0$ se $i \neq j$. Note que os indices i e j não são componentes de $\mathbf{L}$ mas sim os momentos algulares da i e j-ésima partículas.

Neste ponto poderíamos começar a diagonalizar os operadores L^2 e L_z imediatamente. Entretanto a teoria que aqui desenvolvêssemos não seria geral o suficiente para atacarmos problemas envolvendo partículas que possuíssem momento magnético $\boldsymbol{\mu} \neq 0$. Como já vimos anteriormente, os elétrons, por exemplo, possuem momento magnético $\boldsymbol{\mu} = \mu_B \boldsymbol{\sigma}$ e seu estado físico é descrito por $|\psi\rangle$ dado por

$$|\psi\rangle = \sum_\alpha \int d^3r \psi_\alpha(\mathbf{r}) \{|\mathbf{r}\rangle \otimes |\alpha\rangle\}$$

onde $|\alpha\rangle = |\uparrow\rangle$ ou $|\downarrow\rangle$. Obviamente, todo o raciocínio desenvolvido anteriormente só é válido se a partícula considerada não possui momento magnético e, portanto, precisamos generalizar nosso conceito de momento angular se quisermos girar "spinores", ou seja, precisamos descobrir como girá-los.

Consideremos uma transformação unitária $U_R^{(S)}(\theta)$ que transforma o spinor $|\chi\rangle$ em $|\widetilde{\chi}\rangle$ correspondente a uma rotação deste spinor de um ângulo θ em torno do eixo $\hat{\mathbf{n}}$. Como já sabemos este operador deve ter a forma geral

$$U_R^{(S)}(\theta) = \exp -\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S})\theta$$

onde $\mathbf{S} = \mathbf{S}^\dagger$. Então $|\widetilde{\chi}\rangle = \exp -\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S})\theta|\chi\rangle$. No caso de spinores com duas componentes, cada componente de $\mathbf{S}$ (S_x, S_y ou S_z) deve ser uma matriz hermitiana 2x2. Para determinar $\mathbf{S}$ vamos conseiderar a tranformação de um operador vetorial $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ que atua neste espaço. Cada componente de $\mathbf{V}$ tranforma-se de forma que

$$\langle\widetilde{\chi}|V_i|\widetilde{\chi}\rangle = \sum_j R_{ij}(\theta)\langle\chi|V_j|\chi\rangle,$$

ou seja, os valores médios das componentes de $\mathbf{V}$ transformam-se como um vetor perante a rotações. Assim

$$U^\dagger V_i U = \sum_j R_{ij}(\theta) V_j$$

No caso de uma rotação infinitesimal em torno de $\hat{z}$ temos

$$U \approx \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} S_z \theta \quad (\theta \ll 1)$$

e

$$R_{ij}(\theta) \approx \begin{bmatrix} 1 & -\theta & 0 \\ \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U^\dagger V_x U = V_x - \theta V_y \\ U^\dagger V_y U = \theta V_x + V_y \\ U^\dagger V_z U = V_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_x + \frac{i}{\hbar}\theta(S_z V_x - V_x S_z) = V_x - \theta V_y \\ V_y + \frac{i}{\hbar}\theta(S_z V_y - V_y S_z) = \theta V_x + V_y \\ V_z + \frac{i}{\hbar}\theta(S_z V_z - V_z S_z) = V_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_z V_x - V_x S_z = i\hbar V_y \\ S_z V_y - V_y S_z = -i\hbar V_x \\ S_z V_z - V_z S_z = 0 \end{cases}$$

Analogamente, rotações infinitesimais em torno de $\hat{x}$ e $\hat{y}$ nos dão

$$\begin{aligned} S_x V_y - V_y S_x &= i\hbar V_z \\ S_x V_z - V_z S_x &= -i\hbar V_y \\ S_x V_x - V_x S_x &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S_y V_z - V_z S_y &= i\hbar V_x \\ S_y V_x - V_x S_y &= -i\hbar V_z \\ S_y V_y - V_y S_y &= 0 \end{aligned}$$

Em particular estas relações valem para o operador $\boldsymbol{\mu} = \mu_B \boldsymbol{\sigma}$. Lembrando, então, que $[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = 2i \sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma$ (ou $\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\sigma} = 2i\boldsymbol{\sigma}$) vemos que as relações acima são satisfeitas para $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$.

Portanto para girarmos um spinor de um ângulo θ em torno de $\hat{\mathbf{n}}$ basta aplicar o operador

$$U_R^{(S)}(\theta) = \exp -i\frac{\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\theta = \cos\frac{\theta}{2} - i\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\sin\frac{\theta}{2}$$

O operador $\mathbf{S}$ é o spin de partícula considerada. Esta nova grandeza tem dimensão de momento angular e suas componentes obedecem a $[S_\alpha, S_\beta] = \sum_\gamma i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}S_\gamma$.

Como não há movimento orbital a ela associado concluímos que este é o momento angular intrínseco da partícula. Isto pode também ser visto através de

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_B\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\mu_B}{\hbar}\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\mu_B}{\hbar}\mathbf{S} = 2\left(\frac{e}{2mc}\right)\mathbf{S}$$

que nos lembra da fórmula clássica (válida no caso de mometum angular orbital),

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2mc}\mathbf{L}.$$

Consequentemente podemos associar $\mathbf{S}$ a um momento angular intrínseco e e generalizar a relação clássica para

$$\boldsymbol{\mu} = g\frac{\mu_B}{\hbar}\mathbf{S}$$

onde $g = 2$ é o chamado fator giromagnético do elétron.

Agora que sabemos girar um spinor podemos construir o operador que gira o estado

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha'}\int d^3r'\psi_{\alpha'}(\mathbf{r}')\left\{|\mathbf{r}'\rangle\otimes|\alpha'\rangle|\right\}$$

Seja

$$\begin{aligned} U_R(\theta) &= U_R^{(O)}(\theta)\otimes U_R^{(S)}(\theta) \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{L})\theta}\otimes e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{S})\theta} \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{L}+\mathbf{S})\theta} \end{aligned}$$

onde $\mathbf{L}+\mathbf{S} = \mathbf{L}\otimes\mathbb{1}(S) + \mathbf{S}\otimes\mathbb{1}(O)$. O rótulo O significa orbital. Aplicando U em $|\psi\rangle$ e multiplicando por $\langle\mathbf{r}|\otimes\langle\alpha|$

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}_a(\mathbf{r}) &= \langle\mathbf{r}|U_R(\theta)|\psi\rangle \\ &= \sum_{\alpha'}\int d^3r'\psi_{\alpha'}(\mathbf{r}')\underbrace{\langle\mathbf{r}|U_R^{(O)}(\theta)|\mathbf{r}'\rangle}_{\langle R^{-1}(\theta)\mathbf{r}|\mathbf{r}'\rangle=\delta\left(\mathbf{r}'-R^{-1}(\theta)\mathbf{r}\right)}\langle\alpha|U_R^{(S)}(\theta)|\alpha'\rangle \\ &= \sum_{\alpha'}U_{\alpha\alpha'}^{(S)}(\theta)\psi_{\alpha'}\left(R^{-1}(\theta)\mathbf{r}\right) \end{aligned}$$

Neste caso o momento angular total é definido como $\mathbf{J} = \mathbf{L}+\mathbf{S}$ onde $[J_\alpha, J_\beta] = i\hbar\sum_\gamma\epsilon_{\alpha\beta\gamma}J_\alpha$. Na realidade ao fazermos uma teoria de momento angular não devemos nos restringir aos operadores $\mathbf{L}$, mas sim definir operadores $\mathbf{J}$ que possam representar ou a parte orbital ou a parte de spin ou a soma de ambas (ou $\mathbf{L}$'s e $\mathbf{S}$'s de partículas diferentes). Estes operadores $\mathbf{J}$ satisfazem às relações de comutação $[J_\alpha, J_\beta] = i\hbar\sum_\gamma\epsilon_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma$ que implicam em $\left[J^2, \mathbf{J}\right] = 0$ onde $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$. E nosso objetivo é, agora, a determinação de seus auto estados.

Vamos inicialmente definir os operadores $J_{(+)} \equiv J_x + iJ_y$ e $J_{(-)} \equiv J_x - iJ_y$. Podemos mostrar trivialmente que

$$\begin{aligned}
\left[J_z, J_{(+)}\right] &= [J_z, J_x + iJ_y] \\
&= i\hbar J_y + \hbar J_x \\
&= \hbar J_{(+)} \\
\left[J_z, J_{(-)}\right] &= [J_z, J_x - iJ_y] \\
&= i\hbar J_y - \hbar J_x \\
&= -\hbar J_{(-)} \\
\left[J_{(+)}, J_{(-)}\right] &= [J_x + iJ_y, J_x - iJ_y] \\
&= 2\hbar J_z \\
\left[J^2, J_{(+)}\right] &= \left[J^2, J_{(-)}\right] \\
&= \left[J^2, J_z\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pela definição de $J_{(+)}$ e $J_{(-)}$ vemos que

$$J_x = \frac{J_{(+)} + J_{(-)}}{2}$$

e

$$J_y = \frac{J_{(+)} - J_{(-)}}{2i}$$

$$\begin{aligned}
J^2 &= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \\
&= \left(\frac{J_{(+)} + J_{(-)}}{2}\right)^2 + \left(\frac{J_{(+)} - J_{(-)}}{2i}\right)^2 + J_z^2 \\
&= \frac{J_{(+)}^2}{4} + \frac{\left\{J_{(+)}, J_{(-)}\right\}}{4} + \frac{J_{(-)}^2}{4} - \frac{J_{(+)}^2}{4} + \frac{\left\{J_{(+)}, J_{(-)}\right\}}{4} - \frac{J_{(-)}^2}{4} + J_z^2 \\
&= \frac{J_{(+)}J_{(-)} + J_{(-)}J_{(+)}}{2} + J_z^2
\end{aligned}$$

Mas como $J_{(+)}J_{(-)} - J_{(-)}J_{(+)} = 2\hbar J_z$ temos

$$J^2 - J_z^2 = J_{(+)}J_{(-)} - \hbar J_z \Rightarrow \begin{cases} J_{(+)}J_{(-)} = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z \\ \text{ou} \\ J_{(-)}J_{(+)} = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z \end{cases}$$

Queremos resolver o problema de auto valores

$$\begin{aligned}
J^2|\lambda m\rangle &= \lambda\hbar^2|\lambda m\rangle \\
J_z|\lambda m\rangle &= \hbar m|\lambda m\rangle
\end{aligned}$$

O primeiro passo é demonstrar que $\lambda \geq m^2$. Prova:

$$\begin{aligned}
J^2 - J_z^2 &= J_x^2 + J_y^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(J_{(+)}J_{(-)} + J_{(-)}J_{(+)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(J_{(+)}J_{(+)}^+ + J_{(+)}^+J_{(+)}\right)
\end{aligned}$$

mas $\langle\lambda m|A^+A|\lambda m\rangle = ||A|\lambda m\rangle||^2 \geq 0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \langle\lambda m|J^2 - J_z^2|\lambda m\rangle &\geq 0 \\
\lambda - m^2 &\geq 0 \\
\text{ou} & \\
\lambda &\geq m^2
\end{aligned}$$

Em seguida vamos estudar os estados $J_{(+)}|\lambda m\rangle$ e $J_{(-)}|\lambda m\rangle$. Conhecendo as relações de comutação $\left[J_z, J_{(\pm)}\right]$ e $\left[J^2, J_{(\pm)}\right]$,

$$\begin{aligned}
J_z J_{(+)}|\lambda m\rangle &= J_{(+)} J_z|\lambda m\rangle + \hbar J_{(+)}|\lambda m\rangle \\
&= J_{(+)} m\hbar|\lambda m\rangle + \hbar J_{(+)}|\lambda m\rangle \\
&= (m+1)\,\hbar J_{(+)}|\lambda m\rangle \\
J_z J_{(-)}|\lambda m\rangle &= J_{(-)} J_z|\lambda m\rangle - \hbar J_{(-)}|\lambda m\rangle \\
&= J_{(-)} m\hbar|\lambda m\rangle - \hbar J_{(-)}|\lambda m\rangle \\
&= (m-1)\,\hbar J_{(-)}|\lambda m\rangle \\
J^2 J_{(\pm)}|\lambda m\rangle &= J_{(\pm)} J^2|\lambda m\rangle \\
&= \lambda\hbar^2 J_{(\pm)}|\lambda m\rangle
\end{aligned}$$

Então concluímos que

i) O estado $J_{(+)}|\lambda m\rangle$ é um auto estado de J_z com auto valor $(m+1)\,\hbar \Rightarrow J_{(+)}|\lambda m\rangle = C_{(+)}(\lambda, m)\,|\lambda, m+1\rangle$ onde $C_{(+)}(\lambda, m)$ é a constante de normalização. $J_{(+)}$ é um operador de "acréscimo" dos auto valores de J_z.

ii) O estado $J_{(-)}|\lambda m\rangle$ é um auto estado de J_z com auto valor $(m-1)\,\hbar \Rightarrow J_{(-)}|\lambda m\rangle = C_{(-)}(\lambda, m)\,|\lambda, m-1\rangle$ onde $C_{(-)}(\lambda, m)$ é a constante de normalização. $J_{(-)}$ é um operador de "decréscimo" dos auto valores de J_z.

iii) $J_{(+)}|\lambda m\rangle$ e $J_{(-)}|\lambda m\rangle$ são auto estados de J^2 porque $J_{(+)}$ e $J_{(-)}$ não atuam em λ.

As conclusões acima nos mostram que dado um certo λ podem existir diversos m's tais que $\lambda \geq m^2$. Como $J_{(+)}$ acresce os valores de m devemos atingir um valor máximo $m = j$ tal que

$$\begin{aligned}
J_{(+)}|\lambda j\rangle &= 0 \\
\Rightarrow J_{(-)} J_{(+)}|\lambda j\rangle &= 0 \\
\Rightarrow \left(J^2 - J_z^2 - \hbar J_z\right)|\lambda j\rangle &= 0 \\
\Rightarrow \lambda\hbar^2 - j^2\hbar^2 - j\hbar^2 &= 0 \\
\Rightarrow \lambda &= j\,(j+1)
\end{aligned}$$

Por outro lado, deve também existir um mínimo $m = j'$ tal que

$$\begin{aligned}
J_{(-)}|\lambda j'\rangle &= 0 \\
\Rightarrow J_{(+)} J_{(-)}|\lambda j'\rangle &= 0 \\
\Rightarrow \left(J^2 - J_z^2 - \hbar J_z\right)|\lambda j'\rangle &= 0 \\
\Rightarrow \lambda\hbar^2 - j'^2\hbar^2 + j'\hbar^2 &= 0 \\
\Rightarrow \lambda &= j'\,(j'-1)
\end{aligned}$$

Então $j\,(j+1) = j'\,(j'-1) \Rightarrow j' = -j$ ou $j' = j+1$.

Como, por hipótese, $j' < j$, a 2ª solução é absurda e portanto $j' = -j \Rightarrow -j \leq m \leq j$.

Se começarmos com $m = j$ e aplicarmos $J_{(-)}$ p vezes acabaremos no estado $|\lambda, j-p\rangle$. Se $j-p = -j$ qualquer aplicação adicional de $J_{(-)}$ nos dá imediatamente zero. Desta forma devemos ter $2j = p$ e portanto os possíveis valores de j são $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$. Dado um certo j os únicos valores possíveis de m são $j, (j-1), (j-2), \ldots, -(j-1), -j$, pois, em caso contrário, seria impossível termos limites superiores ou inferiores para m. Então,

$$\lambda = j\,(j+1)$$

e

$$m = \underbrace{j, (j-1), \ldots, -(j-1), -j}_{2j+1 \text{ valores}}$$

$$\begin{aligned}
J^2|jm\rangle &= j\,(j+1)\,\hbar^2\,|jm\rangle \\
J_z|jm\rangle &= m\hbar\,|jm\rangle \quad \text{onde} \quad m = j, (j-1), \ldots, -(j-1), -j
\end{aligned}$$

Podemos ainda determinar $C_{(+)}(j,m)$ e $C_{(-)}(j,m)$:

$$\begin{aligned}
J_{(+)}|jm\rangle &= C_{(+)}(j,m)\,|j,m+1\rangle \\
\Rightarrow \langle j,m|J_{(-)} &= \langle j,m+1|C^*_{(+)}(j,m) \\
\Rightarrow |C_{(+)}(j,m)|^2 &= \langle j,m|J_{(-)}J_{(+)}|jm\rangle \\
&= \langle j,m|J^2 - J_z^2 - \hbar J_z|j,m\rangle \\
&= j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 - m\hbar^2 \\
&= [j(j+1) - m(m+1)]\,\hbar^2 \\
&= (j-m)(j+m+1)\,\hbar^2
\end{aligned}$$

Analogamente podemos mostrar que $|C_{(-)}(j,m)|^2 = (j+m)(j-m+1)\hbar^2$.

Então escolhendo as fases de $C_{(+)}$ e $C_{(-)}$ como nulas temos

$$\begin{aligned}
J_{(+)}|j,m\rangle &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)}\hbar\,|j,m+1\rangle \\
J_{(-)}|j,m\rangle &= \sqrt{(j-m+1)(j+m)}\hbar\,|j,m-1\rangle
\end{aligned}$$

de onde vemos diretamente que $J_{(+)}|j,j\rangle = 0$ e $J_{(-)}|j,-j\rangle = 0$.

Em geral, J^2 e J_z não constituem um CCOC. Por exemplo, se estivermos estudando uma hamiltoniana invariante por rotações teremos $[H,J_z] = \left[H,J^2\right] = \left[J^2,J_z\right] = 0$. Então existe uma certa degenerescência $g(j,m)$ associada a cada par de auto valores $j(j+1)\hbar^2$ e $m\hbar$. Os estados deste subespaço que chamaremos de $\mathcal{E}(j,m)$, denotamos por $|k,j,m\rangle$ onde $k = 1,\ldots,g(j,m)$.

Se $m \neq j$, existe outro subespaço $\mathcal{E}(j,m+1)$ também de degenerescência $g(j,m)$ que pode ser construido dado $|k,j,m\rangle \in \mathcal{E}(j,m)$. Considere os estados $J_{(+)}|k_1,j,m\rangle$ e $J_{(+)}|k_2,j,m\rangle$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \langle k_2,j,m|J_{(-)}J_{(+)}|k_1,j,m\rangle &= \langle k_2,j,m|J^2 - J_z^2 - \hbar J_z|k_1,j,m\rangle \\
&= [j(j+1) - m(m+1)]\,\hbar^2\langle k_2,j,m|k_1,j,m\rangle \\
&= [j(j+1) - m(m+1)]\,\hbar^2\delta_{k_1k_2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ os estados obtidos pela aplicação de $J_{(+)}$ a $|k,j,m\rangle$ formam outro subespaço $\mathcal{E}(j,m+1)$ de mesma dimensão $g(j,m)$.

Analogamente podemos repetir o mesmo raciocínio para $\mathcal{E}(j,m-1)$ obtido pela aplicação de $J_{(-)}$ em $\mathcal{E}(j,m)$. Obviamente aplicações consecutivas de $J_{(\pm)}$ sobre $\mathcal{E}(j,m)$ nos geram $(2j+1)$ subespaços de dimensão $g(j)$ já que as dimensões de cada um destes subespaços independe de m.

Esquematicamente temos

$$\underbrace{\left.\begin{array}{ccccc}
 & k=1 & k=2 & \ldots & k=g(j) \\
\mathcal{E}(j,m=j) & |1,j,j\rangle & |2,j,j\rangle & \ldots & |g(j),j,j\rangle \\
\mathcal{E}(j,j-1) & |1,j,j-1\rangle & |2,j,j-1\rangle & \ldots & |g(j),j,j-1\rangle \\
\vdots & & & & \\
\mathcal{E}(j,-j) & |1,j,-j\rangle & |2,j,-j\rangle & \ldots & |g(j),j,-j\rangle \\
 & \uparrow & & & \\
 & \mathcal{E}(1,j) & & &
\end{array}\right\}}_{g(j)\ \text{subespaços}\ \mathcal{E}(k,j)\ \ (\dim\mathcal{E}(k,j)=2j+1)}\ (2j+1)\ \text{subespaços}\ \mathcal{E}(j,m)$$

$$\langle k,j,m|k',j',m'\rangle = \delta_{kk'}\delta_{jj'}\delta_{mm'}$$

e

$$\sum_j \sum_{m=-j} \sum_{k=1}^{g(j)} |k,j,m\rangle\langle k,j,m| = \mathbb{1}$$

Na representação matricial é mais conveniente trabalharmos com $\mathcal{E}(k,j)$. Assim, J^2 ou J_z podem ser representados por matrizes da forma

$$
\begin{array}{cccc}
 & \mathcal{E}(k,j) & \mathcal{E}(k',j) & \mathcal{E}(k',j') & \dots \\
\mathcal{E}(k,j) & \overset{\text{matriz}}{(2j+1)\times(2j+1)} & 0 & 0 & \\
\mathcal{E}(k',j) & 0 & \overset{\text{matriz}}{(2j+1)\times(2j+1)} & 0 & \\
\mathcal{E}(k',j') & 0 & 0 & \overset{\text{matriz}}{(2j'+1)\times(2j'+1)} & \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

Para cada valor de k temos alguns valores compatíveis de j e o subespaço $\mathcal{E}(j,k)$ pode ser decomposto em subespaços correspondentes a $j(j+1)\hbar^2$ com degenerescências $2j+1$.

Exemplo: componentes de $\mathbf{J}$ no caso $j = 1/2$ ou $j = 1$.

i) $\quad j = 1/2 \Rightarrow m = \pm 1/2 \quad (\mathbf{J} = \mathbf{S})$

$$J_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ J_{(+)} = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } J_{(-)} = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } J^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) $\quad j = 1 \Rightarrow m = 0, \pm 1$

$$J_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ J_{(+)} = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } J_{(-)} = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ J_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } J^2 = 2\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde vemos que a representação $j = 1/2$ das matrizes de momento angular $\mathbf{J}$ são as componentes do spin do sistema. Da mesma forma podemos associar as matrizes de $j = 1$ aos geradores de rotações de estados de 3 componentes, por exemplo, spin $\mathbf{S}$ onde $s = 1$ e $S^2|\psi\rangle = \sqrt{s(s+1)}\hbar^2|\psi\rangle$.