viii) Invariância de Gauge

Na eletrodinâmica, o importante é conhecermos os campos elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ e magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, dados por

$$\begin{array}{c}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{r},t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\end{array} \quad \text{(II.2.84)}$$

Com essas relações vemos que $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ ficam inalterados se substituirmos U e $\mathbf{A}$ por

$$\begin{array}{c}U'(\mathbf{r},t) \equiv U(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{r},t) \\ \mathbf{A}'(\mathbf{r},t) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \boldsymbol{\nabla}\chi(\mathbf{r},t)\end{array} \quad \text{(II.2.85)}$$

que é a chamada tranformação de gauge (ou calibre) pois

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\chi = 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\nabla}U' = \boldsymbol{\nabla}U - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\chi.$$

Na formulação newtoniana da mecânica clássica

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right)$$

e

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

é um invariante de gauge. Já no formalismo hamiltoniano temos

$$\begin{array}{rcl} L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) & = & \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - q\left(U - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\cdot\mathbf{A}\right) \\ \text{e} \quad \mathbf{p} & = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} & = m\dot{\mathbf{r}} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \end{array}$$

é o momento canonicamente conjugado a $\mathbf{r}$. Usando que $H = \mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{r}} - L$ podemos escrever

$$H(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 + qU$$

de onde podemos definir

$$\boldsymbol{\pi} \equiv m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}$$

como o momento mecânico da partícula. As equações de Hamilton são

$$\begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{r}} & = & \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}}H \\ \dot{\mathbf{p}} & = & -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}H \end{array}$$

que necessitam da escolha de um dado gauge devido à forma de H. Assim, temos no gauge $\mathcal{J}$ a escolha $\{U(\mathbf{r},t), \mathbf{A}(\mathbf{r},t)\}$ enquanto que no $\mathcal{J}'$ temos $\{U'(\mathbf{r},t), \mathbf{A}'(\mathbf{r},t)\}$. A invariância de gauge da equação clássica de movimento requer $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t)$ e $\dot{\mathbf{r}}'(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ o que implica em $\boldsymbol{\pi}'(t) = \boldsymbol{\pi}(t)$. Então podemos escrever

$$\mathbf{p}' - \frac{q}{c}\mathbf{A}' = \mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{p} + \frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi,$$

Então $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ e

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi. \quad \text{(II.2.86)}$$

Podemos, então, definir as grandezas físicas como aquelas independentes da escolha da gauge. Portanto, $\dot{\mathbf{r}}$ é física e $\mathbf{p}$ é não física.

Uma função cuja forma independe do gauge é não-física porque $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}$. Assim sendo, uma função $\mathcal{G}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ é física quando a sua forma depende do gauge

$$\mathcal{G}(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \mathcal{G}'(\mathbf{r}',\mathbf{p}',t) \Rightarrow \mathcal{G}(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \mathcal{G}'\left(\mathbf{r},\mathbf{p} + \frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi, t\right)$$

Como exemplo temos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}\left(\mathbf{r},\mathbf{p},t\right) &= \mathbf{p}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\\ \boldsymbol{\pi}'\left(\mathbf{r},\mathbf{p},t\right) &= \mathbf{p}-\frac{q}{c}\mathbf{A}'\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}'\left(\mathbf{r},\mathbf{p}+\frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi,t\right) &= \mathbf{p}+\frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi-\frac{q}{c}\mathbf{A}-\frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi\\ &= \mathbf{p}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\\ &= \boldsymbol{\pi}\left(\mathbf{r},\mathbf{p},t\right)\end{aligned}$$

Em geral,

$$\mathcal{G}\left(\mathbf{r},\mathbf{p},t\right)=F\left(\mathbf{r},\mathbf{p}-\frac{q}{c}\mathbf{A},t\right)$$

Vamos agora analisar as tranformações de gauge em mecânica quântica. Aqui, devemos ter os operadores $\mathbf{R}$ e $\mathbf{P}$ preservando as relações de comutação canônicas.

Então $\mathbf{R}=\mathbf{R}'$ e $\mathbf{P}=\mathbf{P}'$ de tal forma que $[R_i,P_j]=i\hbar\delta_{ij}$ e $\mathbf{P}=-i\hbar\boldsymbol{\nabla}$. Portanto, como $\boldsymbol{\Pi}=\mathbf{P}-\frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{R})$ e $\boldsymbol{\Pi}'=\mathbf{P}'-\frac{q}{c}\mathbf{A}'(\mathbf{R}')$ temos $\boldsymbol{\Pi}'=\boldsymbol{\Pi}-\frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi$ o que nos leva a

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\right)+qU\\ H' &= \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P}-\frac{q}{c}\mathbf{A}'\right)+qU'\end{aligned}$$

Definimos a transformação de gauge através de relações com os operadores quânticos. Então devemos descobrir uma transformação unitária que execute esta operação no estado físico $|\psi\rangle$.

Como no caso clássico tivemos

$$\{\mathbf{r},\mathbf{p}\}\rightarrow\{\mathbf{r}',\mathbf{p}'\},$$

devemos introduzir uma tranformação $|\psi'\rangle=T_\chi|\psi\rangle$ tal que

$$\begin{aligned}\langle\psi'|\mathbf{R}|\psi'\rangle&=\langle\psi|\mathbf{R}|\psi\rangle\\ \langle\psi'|\mathbf{P}|\psi'\rangle&=\langle\psi|\mathbf{P}+q\boldsymbol{\nabla}\chi|\psi\rangle\end{aligned}\qquad\text{(II.2.87)}$$

de acordo com a (II.2.86). Como $|\psi'\rangle=T_\chi|\psi\rangle$ temos pela (II.2.87) $T_\chi^\dagger\mathbf{R}T_\chi=\mathbf{R}$ e $T_\chi^\dagger\mathbf{P}T_\chi=\mathbf{P}+\frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi$.

Então,

$$\mathbf{R}T_\chi=T_\chi\mathbf{R}\Rightarrow T_\chi=e^{iF(\mathbf{R})}$$

Usando que

$$[\mathbf{P},T_\chi]=\hbar\boldsymbol{\nabla}F\left(\mathbf{R}\right)T_\chi$$

e a expressão para $T_\chi^\dagger\mathbf{P}T_\chi$ concluímos que

$$\hbar\boldsymbol{\nabla}F=\frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi\Rightarrow F\left(\mathbf{R}\right)=F_0\left(t\right)+\frac{q}{\hbar c}\chi$$

e

$$T_\chi\left(t\right)=\exp\frac{iq}{\hbar c}\chi\left(\mathbf{R},t\right)\Rightarrow\psi'\left(\mathbf{r},t\right)=e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi(\mathbf{r},t)}\psi\left(\mathbf{r},t\right)$$

Esta tranformação deixa a dinâmica do sistema inalterada pois

$$i\hbar\frac{d|\psi'\rangle}{dt}=H'|\psi'\rangle$$

dado que

$$i\hbar\frac{d|\psi\rangle}{dt}=H|\psi\rangle$$

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{d|\psi'\rangle}{dt} &= i\hbar\frac{d}{dt}\left\{T_\chi|\psi\rangle\right\} \\
&= i\hbar\frac{dT_\chi}{dt}|\psi\rangle + i\hbar T_\chi\frac{d|\psi\rangle}{dt} \\
&= -q\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}T_\chi|\psi\rangle + T_\chi H|\psi\rangle\right\} \\
&= \left\{-\frac{q}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} + \widetilde{H}\right\}|\psi'\rangle \quad \text{(II.2.88)}
\end{aligned}
$$

onde $\widetilde{H} \equiv T_\chi H T_\chi^\dagger$.

Como

$$
\widetilde{H} = \frac{1}{2m}\left[\widetilde{\mathbf{P}} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{R}},\mathbf{t})\right]^2 + qU\left(\widetilde{\mathbf{R}},t\right)
$$

e

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{R}} &= T_\chi\mathbf{R}T_\chi^\dagger = \mathbf{R} \\
\widetilde{\mathbf{P}} &= T_\chi\mathbf{P}T_\chi^\dagger = \mathbf{P} - \frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi
\end{aligned}
$$

temos

$$
\widetilde{H} = \frac{1}{2m}\left[\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A} - \frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi\right]^2 + qU\left(\mathbf{R},t\right)
$$

mas

$$
\begin{aligned}
H' &= \frac{1}{2m}\left[\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}'\right] + qU'\left(\mathbf{R},t\right) \\
&= \widetilde{H} - \frac{q}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}
\end{aligned}
$$

que levada em (II.2.88) nos dá

$$
i\hbar\frac{d|\psi'\rangle}{dt} = H'|\psi'\rangle
$$

Os observáveis se transformam sob T_χ da seguinte maneira

$$
\widetilde{K} \equiv T_\chi K T_\chi^\dagger
$$

e portanto $\widetilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ e $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} - \frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi$. Logo

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\Pi}} &= \widetilde{\mathbf{P}} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \\
&= \mathbf{P} - \frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi - \frac{q}{c}\mathbf{A} \\
&= \boldsymbol{\Pi} - \frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi \\
&= \boldsymbol{\Pi}' \\
&\Rightarrow \widetilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}' \quad \text{e} \quad \widetilde{\boldsymbol{\Pi}} = \boldsymbol{\Pi}'
\end{aligned}
$$

Para observáveis associados a grandezas físicas existe G tal que $\widetilde{G} = G'$.

Para mostrar esse resultado devemos lembrar que, classicamente,

$$
\mathcal{G}\left(\mathbf{r},\mathbf{p},t\right) = \mathcal{G}'\left(\mathbf{r},\mathbf{p} + \frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi,t\right)
$$

então, usando a correspondência clássica

$$
\mathcal{G}\left(\mathbf{R},\mathbf{P},t\right) = \mathcal{G}'\left(\mathbf{R},\mathbf{P} + \frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi,t\right)
$$

o que implica em

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{G}}\left(\mathbf{R},\mathbf{P},t\right) &= \widetilde{\mathcal{G}}'\left(\mathbf{R},\mathbf{P}+\frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi,t\right)\\
&= \mathcal{G}'\left(\widetilde{\mathbf{R}},\widetilde{\mathbf{P}}+\frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi,t\right)\\
&= \mathcal{G}'\left(\mathbf{R},\mathbf{P},t\right)\\
\Rightarrow \widetilde{\mathcal{G}}\left(\mathbf{R},\mathbf{P},t\right) &= \mathcal{G}'\left(\mathbf{R},\mathbf{P},t\right)
\end{aligned}$$

Exemplos:

$$K=\frac{\Pi^2}{2m}=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{P}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2$$

é um observável físico mas H não o é pois $\widetilde{H}\neq H'$. Só quando $\frac{\partial\chi}{\partial t}=0$ H representa a energia do sistema.

Medidas de observáveis físicos

Seja $G|\varphi_n\rangle=g_n|\varphi_n\rangle$, onde G é físico, e $p_n=|\langle\varphi_n|\psi\rangle|^2$.

Sob a transformação $|\varphi_n'\rangle=T_\chi|\varphi_n\rangle$ temos

$$\begin{aligned}
T_\chi G T_\chi^\dagger T|\varphi_n\rangle &= g_n T_\chi|\varphi_n\rangle \Rightarrow \widetilde{G}|\varphi_n'\rangle=g_n|\varphi_n'\rangle\\
&\Rightarrow G'|\varphi_n'\rangle=g_n|\varphi_n'\rangle
\end{aligned}$$

e o espectro de G fica inalterado. Como $\langle\varphi_n'|\psi'\rangle=\langle\varphi_n|\psi\rangle$ teremos as mesmas probabilidades de medida de g_n.

Densidades de probabilidade e corrente

Como já vimos anteriormente

$$\rho\left(\mathbf{r},t\right)=|\psi\left(\mathbf{r},t\right)|^2$$

e

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{r},t\right)=\frac{1}{m}\mathrm{Re}\left\{\psi^*\left[-i\hbar\boldsymbol{\nabla}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\right]\psi\right\}$$

Como $\psi'=e^{iq\chi/\hbar c}\psi$ teremos

$$\rho'\left(\mathbf{r},t\right)=|\psi'\left(\mathbf{r},t\right)|^2=|\psi\left(\mathbf{r},t\right)|^2=\rho\left(\mathbf{r},t\right)$$

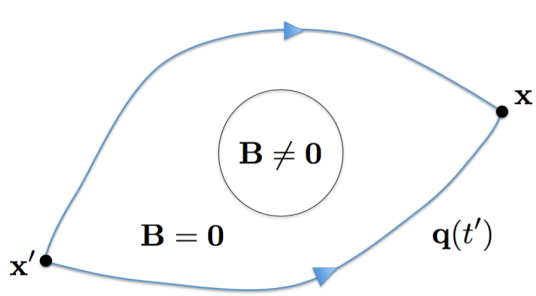
e

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}'\left(\mathbf{r},t\right) &= \frac{1}{m}\mathrm{Re}\left\{e^{-\frac{-i\chi q}{\hbar c}}\psi^*\left[-i\hbar\boldsymbol{\nabla}-\frac{q}{c}\mathbf{A}'\right]e^{iq\chi/\hbar c}\psi\right\}\\
&= \frac{1}{m}\mathrm{Re}\left\{\psi^*\left[-i\hbar\boldsymbol{\nabla}-\frac{q}{c}\mathbf{A}'+\frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\chi\right]\psi\right\}\\
&= \mathbf{J}\left(\mathbf{r},t\right)
\end{aligned}$$

pois $\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\boldsymbol{\nabla}\chi$.

O potencial vetor em mecânica quântica (o efeito Aharonov-Bohm)

Vamos estudar agora o problema do movimento de partículas carregadas em torno de um solenóide infinito (visto de cima) como na figura abaixo.



A função de onda $\psi(\mathbf{x},t)$ é dada por

$$\psi(\mathbf{x},t) = \int K(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',0)\,\psi(\mathbf{x}',0)\,d^3x'$$

onde

$$K(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',0) = \int_{\mathbf{x}'}^{\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{q}(t')\exp\frac{i}{\hbar}S[\mathbf{q}(t')]$$

Na presença do potencial vetor $\mathbf{A}$ tal que $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}=\mathbf{B}$ como mostrado na figura a ação muda para

$$S \to S_0 + \int_0^t \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{q}}{dt} = S_0 + \int_{\mathbf{x}'}^{\mathbf{x}} \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{q}$$

Convém notar que, apesar de $\mathbf{B}=0$ fora do solenóide, $\mathbf{A}\neq 0$ em todo o espaço.

Como o propagador envolve todos os caminhos geométricos que contornam o solenóide entre $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}$ podemos separar as suas contribuições em

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{x}'}^{\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{q}(*) &= \int_{\mathbf{x}'}^{\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{q}(*)\,(\text{por cima}) + \int_{\mathbf{x}'}^{\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{q}(*)\,(\text{por baixo}) \\ &= \int_{\mathbf{x}'}^{\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{q}\exp\frac{i}{\hbar}S_0[\mathbf{q}]\exp\frac{ie}{\hbar c}\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{q} + \int_{\mathbf{x}'}^{\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{q}\exp\frac{i}{\hbar}S_0[\mathbf{q}]\exp\frac{ie}{\hbar c}\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{q}\end{aligned}$$

As integrais de $\mathbf{A}$ ao longo dos caminhos por cima ou por baixo do solenóide puderam ser fatoradas das integrais por serem independentes dos respectivos caminhos. As integrais $\int$ ou $\int$ só contêm caminhos ao longo dos quais $\mathbf{B}=0$. Assumindo que $\psi(\mathbf{x}',0)=\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_0)$ teremos

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x},t) &= K_I(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,0)\exp\frac{ie}{\hbar c}\int_I \mathbf{A}\cdot\mathbf{dq} + K_{II}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,0)\exp\frac{ie}{\hbar c}\int_{II}\mathbf{A}\cdot\mathbf{dq} \\ &= \psi_I(\mathbf{x},t) + \psi_{II}(\mathbf{x},t)\end{aligned}$$

onde I e II denotam, respectivamente, as regiões por cima ou por baixo do solenóide.

Se quisermos estudar a figura de interferência resultante em $\mathbf{x}$ devemos analisar

$$|\psi(\mathbf{x},t)|^2 = |\psi_I|^2 + |\psi_{II}|^2 + 2\mathrm{Re}\psi_I\psi_{II}^*.$$

Com relação a um problema de interferência de ψ_I e ψ_{II} com $\mathbf{B}=0$ no interior do solenóide (apenas uma região impenetrável no espaço) o novo problema ($\mathbf{B}\neq 0$) adquire uma fase adicional no último termo da equação acima que é dado por

$$\exp\frac{ie}{\hbar c}\left[\int_I \mathbf{A}\cdot\mathbf{dq} - \int_{II}\mathbf{A}\cdot\mathbf{dq}\right] = \exp\frac{ie}{\hbar c}\oint \mathbf{A}\cdot\mathbf{dq},$$

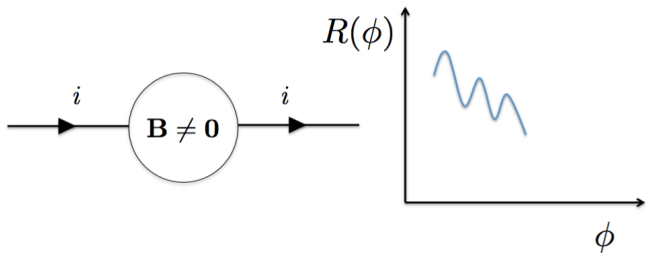
cujo expoente nada mais é (Teorema de Stokes) que

$$\oint \mathbf{A}\cdot\mathbf{dq} = \int_S \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds} = \phi,$$

o fluxo de $\mathbf{B}$ no interior do solenóide. Então a fase adicional é dada por

$$e^{i\frac{e\phi}{\hbar c}} \equiv e^{2\pi i\phi/\phi_0}$$

onde $\phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{e} = 4.135\times 10^{-7}$ Gauss-cm^2 é o chamado quantum de fluxo. Portanto, monitorando o fluxo no interior do solenóide teremos uma variação nas franjas de interferência. Este efeito foi observado através da medida da resistência de anéis metálicos com a seguinte montagem:



Há uma contribuição para a resistência que oscila com uma pequena amplitude e período hc/e.

O monopolo magnético

Vamos supor que exista na natureza uma carga magnética e_M. Desta forma teríamos de modificar a equação $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ para

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_M \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{e_M}{r^2}\hat{r}$$

Como $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$ temos

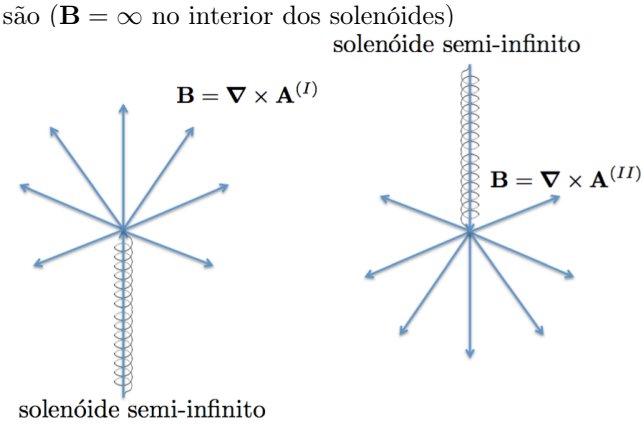
$$\mathbf{A} = \frac{e_M\,(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\varphi}$$

que é singular para $\theta = \pi$. Na realidade, $\mathbf{A}$ deve ser sempre singular pois senão, como $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = 0$, teríamos

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \int dv \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = 0,$$

ao invés de $4\pi e_M$.

Duas possíveis opções para $\mathbf{A}$ são ($\mathbf{B} = \infty$ no interior dos solenóides)



$$\mathbf{A}^{(I)} = \frac{e_M\,(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\varphi} \quad \text{para } \theta < \pi - \epsilon$$

$$\mathbf{A}^{(II)} = \frac{-e_M\,(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\varphi} \quad \text{para } \theta > \epsilon$$

Se $\epsilon < \theta < \pi - \epsilon$

$$\mathbf{A}^{(II)} - \mathbf{A}^{(I)} = -\frac{2e_M}{r\sin\theta}\hat{\varphi}$$

A equação acima implica que $\mathbf{A}^{(I)}$ e $\mathbf{A}^{(II)}$ são relacionados por uma transformação de gauge, o que é facilmente constatado se fizermos $\chi = -2e_M\varphi$ em (II.2.85), pois

$$\boldsymbol{\nabla}\chi = \hat{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi} = -\frac{2e_M}{r\sin\theta}\hat{\varphi}$$

Sabemos ainda que numa transformação de gauge

$$\psi' = \exp\frac{i\chi e}{\hbar c}\psi$$

e, portanto,

$$\psi^{(II)} = e^{-2iee_M\varphi/\hbar c}\psi^{(I)}.$$

Como $\psi^{(II)}$ e $\psi^{(I)}$ são funções uniformes devemos exigir que

$$\frac{2ee_M}{\hbar c} = \pm N$$

o que implica em

$$e_M = N\frac{\hbar c}{2e} = \frac{N}{2}\left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)e = N\left(\frac{137}{2}e\right)$$

Portanto, se existisse carga magnética ela deveria ser 137/2 vezes a carga eletrônica. Mais ainda, os seus valores possíveis seriam quantizados em múltiplos desta carga magnética elementar, o quantum de carga magnética. Assim sendo, a mecânica quântica prevê, naturalmente, que a existência de um tipo de carga implica na quantização da outra. Note, porém, que a recíproca não é verdadeira pois mesmo sem a existência da carga magnética, a carga elétrica apresenta-se quantizada na natureza.