Mecânica Quântica II

3a LISTA

II/2022

1) Usando as 3 primeiras ondas parciais, calcule a seção de choque diferencial de uma esfera rígida quando o comprimento de onda de de Broglie da partícula incidente for igual à circunferência da esfera. Esboce o seu gráfico polar , calcule a seção de choque total e estime a precisão do seu resultado. Discuta, ainda, o que ocorre quando o comprimento de onda da partícula é muito maior que o tamanho da esfera.

2) Considere o potencial $V(\vec{r})$ tal que $V = 0$ se $r > R$ e $V = V_0$ se $r < R$, onde V_0 é uma constante positiva ou negativa. Usando o método de ondas parciais mostre que se $|V_0| << E = \hbar^2 k^2/2m$ e $kR << 1$, a seção de choque diferencial é isotrópica e que a seção de choque total é dada por

$$\sigma = \left(\frac{16\pi}{9}\right)\frac{m^2\, V_0^2\, R^6}{\hbar^4}.$$

Suponha que a energia sofra um pequeno acréscimo. Mostre, então, que a distribuição angular pode ser escrita como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A + B\,\cos\theta$$

e obtenha uma expressão aproximada para B/A.

3) Conside o espalhamento por um potencial "$\delta - shell$"

$$\frac{2m}{\hbar^2}\,V(r) = \gamma\,\delta(r - R) \qquad (\gamma > 0)$$

a) Monte a equação que determina o phase-shift de onda s, $\delta_0(k)$, onde $\hbar^2 k^2 = 2mE$.

b) Se $\gamma >> R^{-1}$ e k, mostre que se tan $kR \neq 0$, $\delta_0(k)$ lembra o resultado correspondente ao da esfera dura. Mostre também que se $\tan kR \approx 0$ (mas $\neq 0$), o comportamento ressonante é possível; isto é, $\cot\delta_0$ passa por um zero para k crescente. Determine aproximadamente as posições das ressonâncias mantendo termos $\mathcal{O}(\gamma^{-1})$. Compare-os com as energias dos estados ligados de uma partícula confinada dentro de um poço esférico de mesmo raio tal que $V = 0$ se $r < R$ e $V = \infty$ se $r > R$. Obtenha ainda uma expressão aproximada para a largura Γ_q da ressonância q, que é definida como

$$\Gamma_q = \frac{-2}{[d(\cot\ \delta_0)/dE]|_{E=E_q}},$$

e note que elas se tornam mais estreitas à medida que $\gamma \to \infty$.

4) Considere a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \int V(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'})\psi(\mathbf{r}^{'})d^3r^{'} = E\psi(\mathbf{r})$$

onde o termo não-local tem a forma

$$V(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\lambda\, u(r)\, u(r^{'})$$

a) Mostre que apenas a onda s é afetada pela interação.

b) Estabeleça a equação integral equivalente à equação de Schrödinger acima e as condições de contorno de espalhamento.

c) Mostre que a amplitude de espalhamento para um momento incidente $\hbar\mathbf{k}$ é

$$f(k) = \frac{4\pi\lambda|v(k)|^2}{1 + \frac{2\lambda}{\pi}\int d^3q \frac{|v(q)|^2}{k^2-q^2+i\epsilon}}$$

onde

$$v(k) = \int_0^\infty \frac{sinkr}{kr}\, u(r)r^2 dr.$$

d) Compare a expressão acima com a série de Born. Qual a condição a ser imposta em λ para a convergência da série para um vetor de onda $\mathbf{k}$?

e) Considere daqui por diante $u(r) = e^{-r/b}r^{-1}$. Mostre que

$$k\ \cot\delta(k) = [(k^2b^2+1)^2 + \xi(k^2b^2-1)]/2\xi b,$$

onde $\xi = 2\pi\lambda b^3$.

f) Determine a condição em γ para que exista um estado ligado. Pode haver mais de um estado ligado neste potencial ?

g) Para baixas energias, $k \to 0$, pode-se expandir

$$k\ \cot\delta(k) = -\frac{1}{a} + \mathcal{O}(k^2),$$

onde a é o comprimento de espalhamento. Calcule a. Expresse $\lim_{E\to 0}$ da seção de choque em termos de a.

h) Discuta o comportamento de $a = a(\xi)$. Como a ocorrência de um estado ligado se reflete em a e na seção de choque ?

5) Uma partícula de spin $s = 1/2$ é espalhada por H'

$$H' = V_0(r) + V_1(r)\,\vec{\sigma}.\,\vec{L} \qquad .$$

O estado incidente tem momento $\hbar\vec{k}_i$ e estado de spin $|\chi_i>$.

a) Mostre que a solução da equação de Schrödinger pode ser escrita como o spinor (veja a nota no final do problema)

$$\tilde{\psi}(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)}\, i^l\, [\, C_l^{(+)}\, R_l^{(+)}(r)\, \Lambda_l^{(+)} \;+\; C_l^{(-)}\, R_l^{(-)}(r)\, \Lambda_l^{(-)}\,]\, Y_{l0}(\theta)\, |\chi_i>$$

onde $\cos\theta = \hat{r}.\,\hat{k}_i$, $C_l^{(\pm)}$ são constantes dependentes das condições iniciais e as funções radiais são tais que

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2}V_l^{(\pm)}(r)\right] R_l^{(\pm)}(r) = 0$$

onde

$$\begin{cases} V_l^{(+)}(r) = V_0(r) \;+\; lV_1(r) & (l = 0, 1, ...) \\ V_l^{(-)}(r) = V_0(r) \;-\; (l+1)V_1(r) & (l = 1, 2, ...) \end{cases}$$

b) Sejam $\delta_l^{(\pm)}$ os phase shifts da onda parcial no canal l devidos a $V_l^{(\pm)}$, ou seja, $R_l^{(\pm)}(r) \sim \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l^{(\pm)})/kr$. Mostre que a matriz de espalhamento $M(k,\theta)$ que aparece em

$$\tilde{\psi}(\vec{r}) \sim \left[e^{i\mathbf{k}_i.\mathbf{r}} + \frac{e^{ikr}}{r}\, M(k,\theta)\right] |\chi_i>$$

pode ser escrita como

$$M(k,\theta) = g(k,\theta) + \vec{\sigma}.\hat{n}\; h(k,\theta)$$

onde $\hat{n}$ é um unitário paralelo a $\vec{k}_i \times \vec{k}_f$,

$$g(k,\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)}}\,[(l+1)e^{i\delta_l^{(+)}}\sin\delta_l^{(+)} + l e^{i\delta_l^{(-)}}\sin\delta_l^{(-)}]\, Y_{l0}(\theta)$$

e

$$h(k,\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)}}\,[e^{i\delta_l^{(+)}}\sin\delta_l^{(+)} - e^{i\delta_l^{(-)}}\sin\delta_l^{(-)}]\; i\,\sin\theta\,\frac{d}{d(\cos\theta)}\, Y_{l0}(\theta)$$

c) Mostre que a seção de choque total é dada por

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)\sin^2 \delta_l^{(+)} + l\ \sin^2 \delta_l^{(-)}]$$

Nota: os operadores $\Lambda_l^{(\pm)}$, definidos como

$$\Lambda_l^{(+)} \equiv \frac{l+1+\vec{\sigma}.\vec{L}}{2l+1} \qquad \Lambda_l^{(-)} \equiv \frac{l-\vec{\sigma}.\vec{L}}{2l+1}$$

são os projetores sobre os subespaços $j = l \pm 1/2$, respectivamente.