

## VII.4) Temperatura finita

Até o momento tratamos dos sistemas de muitas partículas referindo-nos ao seu estado fundamental e estados excitados. Tudo o que foi visto até o momento, teoria de perturbações, espalhamento, etc, pode ser usado convenientemente no caso do espaço de Fock ou produto direto de diferentes espaços de Fock.

Entretanto, nem sempre estaremos interessados em experiências que nos levem a tratar de processos de transição específicos entre diferentes auto estados do sistema não integrante, via teoria de perturbações ou qualquer outro método de aproximação específico.

Sistemas de muitas partículas estão, em geral, a temperatura finita e, portanto, devemos trabalhar com estes sistemas em equilíbrio termodinâmico, o que requer o tratamento específico do sistema em condições particulares. Por exemplo, devemos especificar o tipo de ensemble apropriado para as condições físicas de interesse. No nosso caso, em particular, estaremos interessados nos ensembles canônico e gran-canônico.

Antes de elaborar a abordagem microscópica vamos rever algumas propriedades termodinâmicas dos sistemas microscópicos.

Como sabemos, a 1ª lei da termodinâmica nos diz que

$$dE = TdS - PdV + \mu dN, \quad (\text{VII.4.1})$$

onde  $E = E(S, V, N)$  é a energia interna do sistema.

Assim podemos escrever que

$$\begin{aligned} T &= \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_{NV} \\ P &= - \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_{SN} \\ \mu &= \left( \frac{\partial E}{\partial N} \right)_{SV} \end{aligned} \quad (\text{VII.4.2})$$

$\Rightarrow dE = 0$  se  $S, V$  e  $N =$  constante.

Entretanto, na prática, as experiências são conduzidas a temperatura e não a entropia constante. A fim de trabalhar com a função termodinâmica apropriada podemos definir, através das transformadas de Legendre, outros potenciais termodinâmicos tais como

a) Energia livre de Helmholtz

$$F(T, V, N) = E - TS \quad \Rightarrow \quad dF = -SdT - PdV + \mu dN \quad (\text{VII.4.3})$$

b) Energia livre de Gibbs

$$G(T, V, N) = E - TS + PV \quad \Rightarrow \quad dG = -SdT + VdP + \mu dN \quad (\text{VII.4.4})$$

c) Potencial termodinâmico

$$\Omega(T, V, \mu) = E - TS - \mu N \quad \Rightarrow \quad d\Omega = -SdT - PdV - Nd\mu \quad (\text{VII.4.5})$$

Destas 3 últimas relações podemos constatar, por exemplo, que

$$\mu = \left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{TV} = \left( \frac{\partial G}{\partial N} \right)_{TP} \quad (\text{VII.4.6})$$

ou ainda

$$S = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V\mu}, \quad P = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T\mu} \quad \text{e} \quad N = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{TV} \quad (\text{VII.4.7})$$

que serão úteis adiante.

Como a função  $E = E(S, V, N)$  depende apenas de variáveis extensivas devemos ter

$$\lambda E = E(\lambda S, \lambda V, \lambda N)$$

que se derivada com respeito a  $\lambda$  nos dá

$$E = S \frac{\partial E}{\partial(\lambda S)} + V \frac{\partial E}{\partial(\lambda V)} + N \frac{\partial E}{\partial(\lambda N)}$$

Assim, se  $\lambda = 1$

$$E = S \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_{VN} + V \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_{SN} + N \left( \frac{\partial E}{\partial N} \right)_{SV} \quad (\text{VII.4.8})$$

Então, usando (VII.4.2, 3, 4 e 5) temos

$$\begin{aligned} E &= TS - PV + \mu N \\ F &= -PV + \mu N \\ G &= \mu N \\ \Omega &= -PV \end{aligned} \quad (\text{VII.4.9})$$

Portanto, sabendo-se calcular  $G$  podemos obter trivialmente  $\mu$  e o conhecimento de  $\Omega$  nos dá diretamente a equação de estado do sistema.

Resta-nos, então, estabelecer a ponte entre as grandezas termodinâmicas e as variáveis (ou estados) microscópicas(os) do sistema em questão.

Estas relações podem ser encontradas em livros de mecânica estatística e estabelecem que

a) no ensemble canônico ( $T$  fixo)

$$F = -k_B T \ln Z \quad (\text{VII.4.10})$$

b) no ensemble gran-canônico ( $T$  e  $\mu$  fixos)

$$\Omega = -k_B T \ln Z_G \quad (\text{VII.4.10}')$$

onde  $Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$  e  $Z_G = \sum_N \sum_n e^{-\beta(E_n - \mu N)}$  são as funções de partição dos referidos ensembles. Aqui definimos  $\beta \equiv (k_B T)^{-1}$ . No nosso caso estaremos particularmente interessados no ensemble gran-canônico.

O operador densidade em equilíbrio pode ser deduzido através do princípio da entropia máxima aplicado à

$$S = -k_B \text{tr} [\hat{\rho} \ln \hat{\rho}] \quad (\text{VII.4.11})$$

sujeito aos vínculos

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \text{tr} (\hat{\rho} \hat{N}) = N \\ \langle H \rangle &= \text{tr} (\hat{\rho} \hat{H}) = E \quad \text{e} \\ \text{tr} \hat{\rho} &= 1, \end{aligned} \quad (\text{VII.4.12})$$

onde usamos que o valor médio de qualquer observável  $\hat{O}$  é dado por  $\langle \hat{O} \rangle = \text{tr} \hat{\rho} \hat{O}$ . Assim podemos deduzir que, no gran-canônico

$$\hat{\rho}_G = Z_G^{-1} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \quad (\text{VII.4.13})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \hat{O} \rangle &= \text{tr} (\hat{\rho} \hat{O}) \\ &= \frac{\text{tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \hat{O}}{\text{tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}}. \end{aligned} \quad (\text{VII.4.14})$$

i) O gás ideal

Vamos estudar um gás ideal de partículas idênticas.

A função de partição é dada por

$$\begin{aligned} Z_G &= \text{tr} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} \\ &= \sum_{n_1 \dots n_\infty} \langle n_1 \dots n_\infty | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | n_1 \dots n_\infty \rangle \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{H} |n_1 \dots n_\infty\rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} (\epsilon_i n_i) |n_1 \dots n_\infty\rangle \\ \hat{N} |n_1 \dots n_\infty\rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} (n_i) |n_1 \dots n_\infty\rangle \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_{n_1 \dots n_\infty} \prod_i e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)n_i} \\ &= \sum_{n_1} e^{-\beta(\epsilon_1 - \mu)n_1} \sum_{n_2} e^{-\beta(\epsilon_2 - \mu)n_2} \dots \sum_{n_\infty} e^{-\beta(\epsilon_\infty - \mu)n_\infty} \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{n_i} e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)n_i} \quad (\text{VII.4.15}) \end{aligned}$$

Estudaremos, então, os casos de bósons e férmions.

**Bósons**

Neste caso,  $n_i = 0, \dots, \infty$ . Então

$$Z_G = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}} \quad (\text{VII.4.16})$$

e

$$\begin{aligned} \Omega_0(T, V, \mu) &= -k_B T \ln Z_G \\ &= -k_B T \sum_i \ln \left( 1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)} \right)^{-1} \\ &= k_B T \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left( 1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)} \right) \quad (\text{VII.4.17}) \end{aligned}$$

Usando a (VII.1.7) temos

$$\begin{aligned} N &= \langle \hat{N} \rangle \\ &= - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{TV} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} \\ &\equiv \sum_i n_i^{(0)} \quad (\text{VII.4.18}) \end{aligned}$$

onde definimos o número de ocupação  $n_i^{(0)}$  do  $i$ -ésimo nível de energia. Esta é a *distribuição de Bose-Einstein* (BE).

## Férmions

Já para os férmions,  $n_i = 0, 1$ . Então

$$Z_G = \prod_i \left[ 1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)} \right]$$

e

$$\begin{aligned} \Omega_0(T, V, \mu) &= -k_B T \ln Z_G \\ &= -k_B T \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)} \right) \quad (\text{VII.4.19}) \end{aligned}$$

Novamente, usando a (VII.4.7) teremos

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \\ &\equiv \sum_i n_i^{(0)} \quad (\text{VII.4.20}) \end{aligned}$$

definindo, assim, o número de ocupação  $n_i^{(0)}$  para férmions. Esta é a *distribuição de Fermi-Dirac* (FD).

Vamos agora explorar um pouco mais a termodinâmica destes sistemas separadamente.

### a) Bósons

Neste caso,  $i \rightarrow \mathbf{k}$  e  $\sum_i \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \Rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk$  deve ser usado pois  $\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  na função de partição (VII.4.17).

Podemos transformar a integral em  $k$  na integral em  $\epsilon$  pois

$$\begin{aligned} d\epsilon &= \frac{\hbar^2 k}{m} dk \\ &= \frac{\hbar^2}{m} \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}} dk \end{aligned}$$

e

$$\frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk \rightarrow \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} d\epsilon \quad (\text{VII.4.20})$$

Então, assumindo uma degenerescência  $g$  por nível

$$\begin{aligned} -\frac{\Omega_0}{k_B T} &= \frac{PV}{k_B T} \\ &= -\frac{gV}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} d\epsilon \sqrt{\epsilon} \ln \left( 1 - e^{\beta(\epsilon - \mu)} \right) \end{aligned}$$

que integrada por partes nos dá

$$PV = \frac{gV}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{3} \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} \quad (\text{VII.4.21})$$

Podemos ainda, usando a definição da distribuição BE (VII.4.18) e transformando as somas em integrais como acima, escrever

$$\begin{aligned} E &= \sum_i n_i^{(0)} \epsilon_i \\ &= g \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} \quad (\text{VII.4.22}) \end{aligned}$$

mostrando, então, que  $PV = 2E/3$ .

De forma análoga temos que

$$\begin{aligned} N &= \sum_i n_i^{(0)} \\ \Rightarrow \frac{N}{V} &= \frac{g}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} \quad (\text{VII.4.23}) \end{aligned}$$

que pode ser invertida se desejarmos calcular  $\mu = \mu(T, V, N)$ .

A integral (VII.4.23) só faz sentido se  $\epsilon - \mu \geq 0$ . Em caso contrário  $n_i^{(0)} < 0$  para alguns valores de  $\epsilon$ . Se  $\epsilon \rightarrow 0$ , devemos ter, necessariamente,  $\mu \leq 0$ .

Por outro lado, no limite clássico ( $T \rightarrow \infty$ ) as duas estatísticas (BE e FD) coincidem com a de Boltzmann e

$$N \rightarrow \sum_i e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}$$

se  $T \rightarrow \infty$ , o que implica em que, neste limite,  $\mu \rightarrow -\infty$ . Temos ainda,

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= -PV \\ &= -k_B T \sum_i e^{\beta(\mu - \epsilon_i)} \\ &= -N k_B T \quad (\text{VII.4.24}) \end{aligned}$$

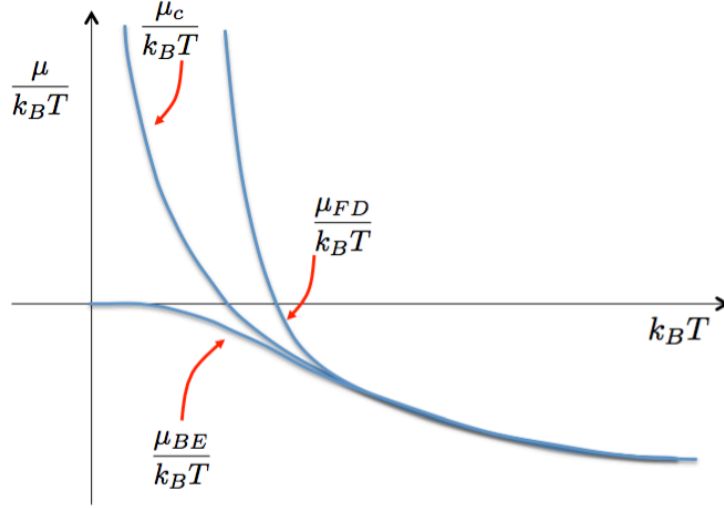
Aproximando a soma por uma integral chega-se a

$$\sum_i e^{-\beta \epsilon_i} = gV \left( \frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \quad (\text{VII.4.25})$$

que com auxílio da (VII.4.24) nos dá

$$\frac{\mu_c}{k_B T} = \ln \left\{ \frac{N}{gV} \left( \frac{2\pi \hbar^2}{mk_B T} \right)^{3/2} \right\} \quad (\text{VII.4.26})$$

que plotamos no gráfico abaixo.



Como vemos na figura,  $\mu_{BE} = \mu_{FD} = \mu_c \rightarrow -\infty$  quando  $T \rightarrow \infty$ . Entretanto, como  $\mu \lesssim 0$  se  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $\mu_c < 0$  se  $T \rightarrow \infty$  vemos que  $\mu_{BE}(T)$  deve ser sempre  $< 0$ .

Vamos assumir que existe  $T_0$  abaixo da qual  $\mu_{BE} \rightarrow 0^-$ . Então, usando a (VII.4.23) podemos calcular esta temperatura pois

$$\frac{N}{V} = \frac{g}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\epsilon/k_B T_0} - 1} \quad (\text{VII.4.27})$$

Em termos de  $x \equiv \epsilon/k_B T_0$  temos

$$\begin{aligned} \frac{N}{V} &= \frac{g}{4\pi^2} \left( \frac{2mk_B T_0}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} \\ &= \frac{g}{4\pi^2} \left( \frac{2mk_B T_0}{\hbar^2} \right)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \quad (\text{VII.4.28}) \end{aligned}$$

onde as funções  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty n^{-x}$  e  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ .

Invertendo a (VII.4.28) teremos

$$T_0 = \frac{3.31}{mk_B} \hbar^2 \left( \frac{N}{Vg} \right)^{2/3} \quad (\text{VII.4.29})$$

Abaixo de  $T_0$  o potencial químico  $\mu$  não muda mas o número de partículas em um determinado nível muda com a temperatura. Então podemos dizer que, pela (VII.4.23)

$$\frac{dN(\epsilon)}{V} = \frac{g}{(4\pi)^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} \quad (\text{VII.4.30})$$

que integrada entre  $\epsilon > 0$  e  $\infty$  nos dá a população dos níveis se  $\epsilon > 0$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{N(\epsilon > 0)}{V} &= \frac{g}{4\pi^2} \left( \frac{2mk_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} \\ &= \frac{N}{V} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

e portanto restam em  $\epsilon = 0$

$$\frac{N(\epsilon = 0)}{V} = \frac{N}{V} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \right] \quad (\text{VII.4.31})$$

Esta é a chamada “condensação de Bose-Einstein” que envolve a presença de um número macroscopicamente grande de partículas ocupando o nível  $\epsilon = 0$ .

A partir do raciocínio aqui usado podemos calcular várias propriedades do gás de bósons tais como  $\frac{E}{V}$ ,  $C_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$ , e ainda a equação de estado do sistema (veja, por exemplo, cap II Fetter+Walecka).

Note que  $g = 1$  no caso de bósons com spin = 0!

## b) Férmions

Aqui ainda continuam válidas as expressões (VII.4.21, 22 e 23) com a diferença que

$$\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} \rightarrow \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$$

e que  $g = 2$  quando temos férmions com  $s = 1/2$ .

Então,

$$\begin{aligned} PV &= \frac{2}{3} E \\ &= \frac{2}{3} \frac{gV}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \end{aligned}$$

e

$$\frac{N}{V} = \frac{g}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \quad (\text{VII.4.32})$$

Note que aqui,  $n^{(0)}(\epsilon) < 1 \quad \forall T$  e, quando  $T \rightarrow \infty$ ,  $n^{(0)}(\epsilon) \rightarrow e^{-\beta(\epsilon-\mu)}$  que é a distribuição de Boltzmann. Se  $T \rightarrow 0$  constatamos que

$$n^{(0)}(\epsilon) = \begin{cases} 0 & \text{se } \epsilon > \mu \\ 1 & \text{se } \epsilon < \mu \end{cases} \equiv \theta(\mu - \epsilon) \quad (\text{VII.4.33})$$

Assim, se  $T = 0$  temos

$$\begin{aligned} \frac{N}{V} &= \frac{g}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\mu d\epsilon \sqrt{\epsilon} \\ &= \frac{g}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{3} \mu^{3/2} \end{aligned}$$

Definindo  $\mu(T = 0) \equiv \epsilon_F$  e invertendo a equação acima temos

$$\begin{aligned} \epsilon_F &= \left( \frac{6\pi^2}{g} \right) \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3} \\ &\equiv \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad (\text{VII.4.34}) \end{aligned}$$

onde  $k_F = (6\pi^2 N/gV)^{1/3}$  como vimos anteriormente no problema do gás de elétrons (VII.2.13).

A (VII.4.32) nos permite ainda calcular

$$\begin{aligned}\frac{E}{V} &= \frac{g}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\mu d\epsilon \epsilon^{3/2} \\ &= \frac{g}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{2}{5} \mu^{5/2}\end{aligned}$$

ou ainda usando a (VII.4.34),  $\frac{E}{N} = \frac{3}{5}\epsilon_F$  como também já havíamos deduzido anteriormente em (VII.2.14).

A equação de estado também pode ser obtida da (VII.4.32) e das equações acima como

$$P = \frac{2}{5} \left(\frac{6\pi^2}{g}\right) \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

Entretanto, se desejarmos estudar a equação de estado a temperatura finita devemos reescrever a (VII.4.32) em termos da nova variável  $x = (\epsilon - \mu)/k_B T$  que nos leva a

$$PV = \frac{2}{3} \frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} (k_B T)^{5/2} \int_{-\mu/k_B T}^{\infty} dx \frac{(x + \mu/k_B T)^{3/2}}{e^x + 1} \quad (\text{VII.4.35})$$

Se definirmos um novo parâmetro  $\alpha \equiv \mu/k_B T$  podemos reescrever a integral como

$$\begin{aligned}I(\alpha) &= \int_{-\alpha}^{\alpha} dx \frac{(x + \alpha)^{3/2}}{e^x + 1} \\ &= \int_{-\alpha}^0 dx \frac{(x + \alpha)^{3/2}}{e^x + 1} + \int_0^{\alpha} dx \frac{(x + \alpha)^{3/2}}{e^x + 1}\end{aligned}$$

Trocando  $x \rightarrow -x$  na 1ª integral e usando que  $(1 + e^{-x})^{-1} = 1 - (e^x + 1)^{-1}$  temos

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} dx (\alpha - x)^{3/2} + \int_0^{\infty} dx \frac{(\alpha + x)^{3/2} - (\alpha - x)^{3/2}}{e^x + 1} + \int_{\alpha}^{\infty} dx \frac{(\alpha - x)^{3/2}}{e^x + 1} \quad (\text{VII.4.36})$$

No limite  $T \rightarrow 0$ , ou  $\alpha \rightarrow \infty$ , teremos

$$\begin{aligned}I(\alpha) &= \frac{2}{5} \alpha^{5/2} + \frac{\pi^2}{4} \alpha^{1/2} + \dots \\ &\equiv \left(\frac{1}{k_B T}\right)^{5/2} \left[ \frac{2}{5} \mu^{5/2} + (k_B T)^2 \frac{\pi^2}{4} \mu^{1/2} + \dots \right]\end{aligned}$$

e a (VII.4.35) e transforma em

$$PV \underset{T \rightarrow 0}{=} \frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{2}{3} \left[ \frac{2}{5} \mu^{5/2} + (k_B T)^2 \frac{\pi^2}{4} \mu^{1/2} + \dots \right] \quad (\text{VII.4.37})$$

Por outro lado, a mesma aproximação pode ser usada para  $N/V$  em (VII.4.32) resultando em

$$\begin{aligned}N &= \left(\frac{\partial(PV)}{\partial\mu}\right)_{TV} \\ &= \frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{2}{3} \left[ \mu^{3/2} + (k_B T)^2 \frac{\pi^2}{8\mu^{1/2}} + \dots \right]\end{aligned}$$



Reescrevendo  $N/V$  em termos de  $\epsilon_F$  usando a (VII.4.34) teremos

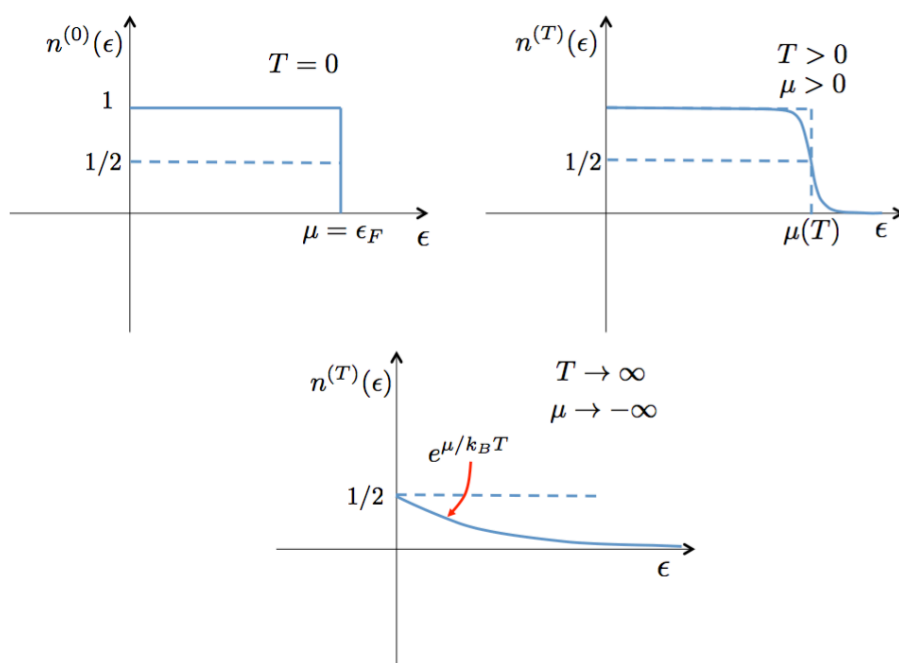
$$\mu = \epsilon_F \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^2 + \dots \right\}^{-2/3}$$

que pode ser resolvida para  $\mu$  em série de potências de  $T^2$  como

$$\mu = \epsilon_F \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right\} \quad (\text{VII.4.38})$$

de onde vemos que baixas temperaturas significa  $k_B T \ll \epsilon_F$ . Em geral, para sistemas metálicos  $\epsilon_F/k_B \sim 10^4 \text{ K} \Rightarrow$  temperatura de degenerescência é muito alta.

A forma geral de  $\mu(T)$  é tal que a forma da distribuição FD deve esquematicamente comportar-se como



Para o caso de Férmons também podemos calcular as suas funções termodinâmicas através das relações introduzidas no início da seção. Por exemplo,

$$\begin{aligned} S(T, V, \mu) &= \left( \frac{\partial(PV)}{\partial T} \right)_{V, \mu} \\ &\approx N k_B^2 \frac{T}{\epsilon_F} \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

onde usamos (VII.4.38). Esta relação, válida para  $k_B T \ll \epsilon_F$ , nos permite calcular

$$\begin{aligned} C_V &= T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{NV} \\ &= \frac{\pi^2}{2} N k_B \left( \frac{k_B T}{\epsilon_F} \right) \end{aligned}$$

No limite  $T \rightarrow \infty$  (limite clássico),  $C_V \rightarrow \frac{3}{2} N k_B$ . Mais detalhes: cap.II Fetter + Walecka.