Mecânica Quântica II

4a LISTA

II/2022

1) Usando o operador de criação de férmions $a^\dagger_{jm}$, apropriado para partículas com momento angular j, forme o estado de camada fechada no qual todos os estados de uma partícula $m = j \ldots -j$ estão ocupados. Prove que a camada fechada tem momento angular total nulo. Se um férmion com número quântico magnético m está ausente da camada fechada de partículas com momento angular j, mostre que o buraco resultante pode ser tratado como uma partícula com número quântico magnético $-m$ e um operador de criação efetivo $(-1)^{j-m}\, a_{jm}$ no acoplamento de momentos angulares.

2) Considere estados não-perturbados $a^\dagger_{1m_1} \ldots a^\dagger_{km_k} \ldots a^\dagger_{nm_n} \left|0\right\rangle$ de n elétrons, cada qual ocupando um dos n orbitais ortogonais degenerados rotulados pelo número quântico k, e com $m_k = \pm 1/2$ denotando o número quântico de spin associado ao orbital k. Mostre que no espaço dos 2^n estados não-perturbados, uma interação de dois corpos independente de spin pode, em teoria de perturbações de primeira ordem, ser substituída por uma hamiltoniana efetiva

$$\mathcal{H}_{eff} = -\frac{1}{\hbar} \sum_{kl} \left\langle kl \left| V \right| lk \right\rangle \boldsymbol{S}_k \cdot \boldsymbol{S}_l + const.$$

onde $\boldsymbol{S}_k$ é o operador de spin localizado

$$\boldsymbol{S}_k = \frac{\hbar}{2} \sum_{m_k m'_k} \left\langle m_k \left| \boldsymbol{\sigma} \right| m'_k \right\rangle a^\dagger_{km_k} a^\dagger_{km'_k}$$

3) Aplique o método de Hartree-Fock a um sistema de dois elétrons que são atraídos para a origem do sistema de coordenadas por um potencial de oscilador harmônico isotrópico $V(r) = 1/2 \mu\omega^2 r^2$ e que interagem entre si segundo um potencial $c\,(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}'')^2$. Resolva as equações de Hartree-Fock para o estado fundamental e o compare com o resultado exato e com o de teoria de perturbações de primeira ordem.

4) Considere um gás de elétrons polarizado no qual $N_{\pm}$ denota o número de elétrons com spin $\pm\hbar/2$. Então:

a) Encontre a energia do estado fundamental em primeira ordem no potencial de interação como função de $N = N_{+} + N_{-}$ e da polarização $\zeta = (N_{+} - N_{-})/N$.

b) Prove que o estado ferromagnético ($\zeta = 1$) possui energia menor que o estado não magnetizado ($\zeta = 0$) se $r_s > (2\pi/5)(9\pi/4)^{1/3}\left(2^{1/3} + 1\right) = 5.45$. Explique o seu resultado.

c) Mostre que $\partial^2 (E/N)/\partial\zeta^2\big|_{\zeta=0}$ fica negativa se $r_s > (3\pi^2/2)^{2/3} = 6.03$.

d) Discuta o significado físico das duas densidades críticas. O que acontece para $5.45 < r_s < 6.03$.