VIII - Mecânica Quântica Relativística

VIII.1) Geometria do espaço-tempo

Nossa intenção agora é explorar a geometria das transformações de Lorentz e do espaço - tempo. Vamos começar estudando transformações lineares em bases não - ortogonais. Consideremos um vetor $|v\rangle = c^i\,|e_i\rangle$ (notação de Einstein $\sum_i c^i\,|e_i\rangle = c^i\,|e_i\rangle$ (VIII.1.1)).

Uma tranformação linear R é definida de forma que

$$|e_i'\rangle = R^j{}_i|e_j\rangle \quad \text{(VIII.1.2)}$$

é uma nova base no espaço considerado.

Então, podemos expandir $|v\rangle$ nesta nova base como

$$\begin{aligned} |v\rangle &= c'^i|e_i'\rangle \;=\; c'^i R^j{}_i|e_j\rangle \\ \Rightarrow c'^i R^j{}_i &= c_j. \quad \text{(VIII.1.3)} \end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados de (VIII.1.3) por $\left(R^{-1}\right)^k{}_j$ teremos

$$\begin{aligned} \left(R^{-1}\right)^k{}_j\,c^j &= c'^i\,\left(R^{-1}\right)^k{}_j R^j{}_i \\ &= c'^i\delta^k{}_i \\ &= c'^k, \end{aligned}$$

ou seja

$$c'^i = \left(R^{-1}\right)^i{}_j\,c^j.$$

Em notação matricial,

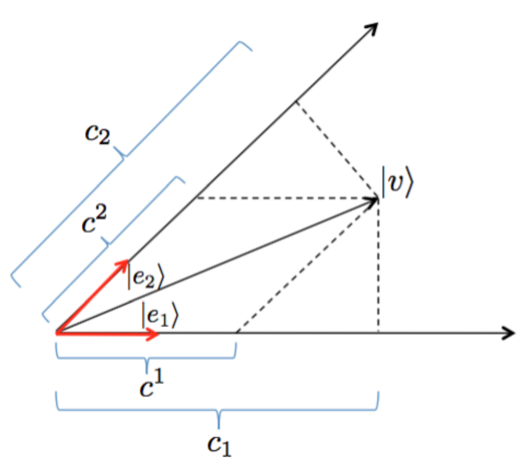
$$c' = R^{-1}c. \quad \text{(VIII.1.4)}$$

Assim como $|v\rangle$ pode ser descrito pela n-upla $\left(c^1, c^2, \ldots, c^n\right)$ existe um outro conjunto de componentes para representá-lo. Consideremos o produto escalar $\langle v|e_i\rangle$ representando a nova componente de $|v\rangle$,

$$\langle v|e_i\rangle = \left(c^j\right)^*\langle e_j|e_i\rangle \equiv c_i. \quad \text{(VIII.1.5)}$$

Portanto dado o conjunto $\left\{c^i\right\}$ podemos encontrar $\{c_i\}$.

Exemplo:



De figura acima vemos que se $|e_1\rangle \perp |e_2\rangle \Rightarrow c^i = c_i$.

Como se transformam os $c_i' s$?

Pela definição das novas componentes devemos ter $c_i' = \left(c'^j\right)^* \left\langle e_j' | e_i' \right\rangle$ e, portanto,

$$\begin{aligned} |e_i'\rangle &= R^j{}_i |e_j\rangle \;\Rightarrow\; \langle e_i'| = \langle e_j| R^{*j}{}_i \\ \Rightarrow \left\langle e_j' | e_i' \right\rangle &= \langle e_k | e_l\rangle \, R^{*k}{}_j R^l{}_i \end{aligned}$$

como $c'^j = \left(R^{-1}\right)^j{}_l \, c^l$ temos $\left(c'^j\right)^* = \left(R^{-1*}\right)^j{}_l c^{*l}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_i' &= \left(R^{-1*}\right)^j{}_l c^{l*} \langle e_k | e_p\rangle \, R^{*k}{}_j R^p{}_i \\ &= \delta^k{}_l R^p{}_i c^{l*} \langle e_k | e_p\rangle \\ &= R^p{}_i c^{k*} \langle e_k | e_p\rangle \\ &= R^p{}_i c_p \\ \Rightarrow c_i' &= R^j{}_i c_j \end{aligned}$$

ou, matricialmente,

$$\tilde{c}' = \tilde{c} R \quad \text{(VIII.1.6)}$$

$\{c^i\}$ são as componentes <u>contravariantes</u> de $|v\rangle$ e $\{c_i\}$ são as componentes <u>covariantes</u> de $|v\rangle$.

Consideremos $|a\rangle = a^i |e_i\rangle$ e $|b\rangle = b^i |e_i\rangle$. O produto $a^i b_j$ se transforma como $a'^i b_j' = \left(R^{-1}\right)^i{}_k R^l{}_j a^k b_l$. Às combinações de variáveis que se transformam como produtos (covariantes, contavariantes ou ambas) de vetores, damos o nome de <u>tensores</u>. Por exemplo,

$$\left(A'\right)^{ijk}{}_{lmn} = \left(R^{-1}\right)^i{}_{i'} \left(R^{-1}\right)^j{}_{j'} \left(R^{-1}\right)^k{}_{k'} R^{l'}{}_l R^{m'}{}_m R^{n'}{}_n A^{i'j'k'}{}_{l'm'n'}. \quad \text{(VIII.1.7)}$$

Vamos particularizar a nossa discussão para os espaços vetoriais sobre o campo dos reais. Neste caso,

$$|e_i'\rangle = R^j{}_i |e_j\rangle \Rightarrow \langle e_i'| = \langle e_j| R^j{}_i \quad \text{(VIII.1.8)}$$

e

$$\langle e_k' | e_i'\rangle = \langle e_l | e_j\rangle \, R^l{}_k R^j{}_i \quad \text{(VIII.1.9)}$$

$\Rightarrow \langle e_i | e_j\rangle$ se transforma como um tensor covariante

$$\langle e_i | e_j\rangle \equiv g_{ij} \quad \text{(VIII.1.10)}$$

que é o *tensor métrico do espaço.*

Pela definição (VIII.1.5) para o campo dos reais

$$c_i = g_{ij} c^j \quad \left(g_{ij} = g_{ji}\right). \quad \text{(VIII.1.11)}$$

Vamos, então, definir g^{ij} de forma que

$$c^i \equiv g^{ij} c_j. \quad \text{(VIII.1.12)}$$

Mas, de (VIII.1.11) temos que

$$\begin{aligned} c^i &= g^{ij} g_{jk} c^k \\ \Rightarrow g^{ij} g_{jk} &= \delta^i{}_k \quad \text{(VIII.1.13)} \end{aligned}$$

Para justificar a (VIII.1.12) devemos mostrar que g^{ij} se transforma como um tensor contravariante de posto-2.

Desta forma

$$\begin{aligned}
c'^i &= g'^{ij} c'_j \\
\Rightarrow \left(R^{-1}\right)^i{}_k c^k &= g'^{ij}\, R^l{}_j c_l \\
\Rightarrow \underbrace{R^p{}_i \left(R^{-1}\right)^i{}_k}_{\delta^p{}_k} c^k &= g'^{ij} R^p{}_i R^l{}_j c_l \\
\Rightarrow c^p &= g'^{ij} R^p{}_i R^l{}_j c_l \\
&= g^{pl} c_l \\
\Rightarrow g'^{ij} R^p{}_i R^l{}_j &= g^{pl} \\
\Rightarrow g'^{ij} &= \left(R^{-1}\right)^i{}_k \left(R^{-1}\right)^j{}_l\, g^{kl}.
\end{aligned}$$

Assim como os vetores podem ser representados por dois tipos de componentes, operadores também admitem várias representações.

$$\begin{aligned}
A|e_i\rangle &= A^k{}_i |e_k\rangle \\
\Rightarrow \langle e_j|A|e_i\rangle &= A^k{}_i \langle e_j|e_k\rangle \\
&= g_{jk} A^k{}_i \\
&\equiv A_{ji}
\end{aligned}$$

por se transformar como um tensor covariante de posto-2. Analogamente,

$$g^{ik} g^{jl} A_{kl} = g^{ik} g^{jl} g_{kr} A^r{}_l \quad = \quad g^{jl} A^i{}_l = A^{ij},$$

que se transforma como um tensor contravariante de posto-2.

Assim,

$$g^{ij} g_{kl} \ldots T^{p}{}_{j}{}^{l\ldots}{}_{\ldots} = T^{pi}{}_{k\ldots}^{\ldots} \quad \text{(VIII.1.14)}$$

ou seja, a multiplicação por g^{ij} levanta o índice j $(j \to i)$ enquanto que g_{ij} abaixa o índice j $(j \to i)$ de um tensor. Em particular,

$$\begin{aligned}
g^{ij} g_{jk} &= g^i{}_k \\
&= \delta^i{}_k \quad \text{(VIII.1.15)}
\end{aligned}$$

Funções Tensoriais

Seja $W^i{}_{j\ldots}^{\ldots}\left(x^1, x^2, \ldots x^N\right)$ uma função tensorial. Como $x'^i = \left(R^{-1}\right)^i{}_j\, x^j$ temos $x^k = R^k{}_j\, x'^j$. Então a função no novo sistema (K') é dada por

$$W'^i{}_{j\ldots}^{\ldots}\left(x'^k\right) = \left(R^{-1}\right)^i{}_s \left(R\right)^t{}_j\, W^s{}_{t\ldots}^{\ldots}\left(R^k{}_l x'^l\right) \quad \text{(VIII.1.16)}$$

Uma função escalar escalar se transforma como

$$W'\left(x'^i\right) = W\left(R^i{}_j\, x'^j\right) \quad \text{(VIII.1.17)}$$

Quando $W = W'$ a função é dita *invariante*.

Exemplo: $W = x^i x_i = g_{ij} x^j x^i$

$$\begin{aligned} W' &= \underbrace{R^i{}_k \left(R^{-1}\right)^l{}_i}_{\delta^k{}_l} x'_l\, x'^k. \\ &= x'^k x'_k \end{aligned}$$

Por outro lado, $W = a_i x^i$ é escalar mas não é invariante pois

$$\begin{aligned} W' &= a_i R^i{}_j x'^j \\ &= a'_j x'^j \end{aligned}$$

e $a'_j \neq a_j$.

Se derivarmos a função escalar $W'(x'^i) = W(R^i{}_j\, x'^j)$ com relação a x'^i temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W'}{\partial x'^i} &= \frac{\partial W}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \\ &= R^k{}_i \frac{\partial W}{\partial x^k} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial x^i}$ se transforma como a componente covariante de um vetor $v_i = \frac{\partial W}{\partial x^i} \equiv \partial_i W$. (VIII.1.18)

Transformações de Lorentz

A transformação de Lorentz é um caso particular do que estamos discutindo onde, usando a notação $\mu = 0, \{i\}$ e $\{i\} = 1, 2, 3$ para os índices, definimos

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} x^\mu = (ct, \mathbf{x}) &= \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \\ x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu \\ &= (ct, -\mathbf{x}) \quad \text{(VIII.1.19)} \end{aligned}$$

A teoria da relatividade restrita nos diz que o produto $x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - |\mathbf{x}|^2$ é invariante. Em notação matricial:

$$\tilde{x} g x = \tilde{x}' g x'. \quad \text{(VIII.1.20)}$$

Vamos representar a transformação de Lorentz (T.L.) por

$$x' = \Lambda x. \quad \text{(VIII.1.21)}$$

Então de (VIII.1.20)

$$\begin{aligned} \tilde{x} \tilde{\Lambda} g \Lambda x &= \tilde{x} g x \\ \Rightarrow \tilde{\Lambda} g \Lambda &= g \quad \text{(VIII.1.22)} \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \det(\tilde{\Lambda} g \Lambda) &= (\det \Lambda)^2 \det g \\ &= \det g \\ \Rightarrow (\det \Lambda)^2 &= 1 \end{aligned}$$

ou

$$\det \Lambda = \begin{cases} +1 & \Rightarrow \text{T.L. próprias} \\ -1 & \Rightarrow \text{T.L. impróprias} \end{cases} \qquad \text{(VIII.1.23)}$$

Vamos estudar as T.L. próprias. Consideremos o ansatz

$$\Lambda = e^L,$$

onde L é uma matriz 4×4,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det \Lambda &= \det e^L = e^{\operatorname{tr} L} = 1 \\ \Rightarrow \operatorname{tr} L &= 0 \end{aligned}$$

Como $g^2 = 1$ temos de (VIII.1.22) que $g\tilde{\Lambda}g = \Lambda^{-1}$. Mas, $\tilde{\Lambda} = e^{\tilde{L}} \Rightarrow g\tilde{\Lambda}g = e^{g\tilde{L}g}$ e como $\Lambda^{-1} = e^{-L}$ temos $g\tilde{\Lambda}g = e^{g\tilde{L}g} = e^{-L}$, ou ainda, $g\tilde{L}g = -L \Rightarrow \widetilde{gL} = -gL$. Ou seja, gL é antissimétrica. Portanto,

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} - \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{K}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ;\ S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;\ S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;\ K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;\ K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(VIII.1.24)}$$

Para determinar $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\zeta}$ devemos estudar 2 casos particulares.

i) $\boldsymbol{\omega} = 0$ e $\boldsymbol{\zeta} = \zeta\, \hat{\mathbf{e}}_1 \Rightarrow L = -\zeta K_1$.

$$\begin{aligned} \Lambda &= e^L \\ &= \left(I - K_1^2\right) - K_1 \sinh\zeta + K_1^2 \cosh\zeta \\ &= \begin{pmatrix} \cosh\zeta & -\sinh\zeta & 0 & 0 \\ -\sinh\zeta & \cosh\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(VIII.1.25)} \end{aligned}$$

ii) $\boldsymbol{\omega} = \theta\, \hat{\mathbf{e}}_3$ e $\boldsymbol{\zeta} = 0 \Rightarrow L = -\theta S_3$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(VIII.1.26)}$$

No caso geral temos

$$\boldsymbol{\zeta} = \hat{\boldsymbol{\beta}} \tanh^{-1}\beta \quad \text{onde} \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\omega} = \theta\hat{\mathbf{n}} \qquad \text{(VIII.1.27)}$$

e portanto a forma geral de Λ é

$$\Lambda = \exp\left\{-\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} - \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{K}\right\}. \qquad \text{(VIII.1.28)}$$

O campo eletromagnético em notação covariante

Dadas as densidades de carga ρ e de corrente $\mathbf{J}$ sabemos que, pela conservação de carga,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0. \quad \text{(VIII.1.29)}$$

Vamos definir $J^\alpha \equiv (c\rho, \mathbf{J})$. Assim a (VIII.1.29) fica

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}c\rho + \frac{\partial}{\partial x^i}J^i = \partial_\alpha J^\alpha = 0. \quad \text{(VIII.1.30)}$$

O gauge de Lorent $\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$ pode ser escrito em notação covariante como

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad \text{(VIII.1.31)}$$

se definirmos o quadrivetor $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$. Neste gauge as equações dos potenciais são resumidas em

$$\Box A^\alpha = \frac{4\pi}{c}J^\alpha \quad \text{(VIII.1.32)}$$

onde $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2$.

Para os campos temos

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \quad \text{(VIII.1.33)}$$

Definindo

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_x & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} = -F^{\beta\alpha} \quad \text{(VIII.1.34)}$$

e o seu dual

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(VIII.1.35)}$$

as equações de Maxwell ficam

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}J^\beta \quad \text{(VIII.1.36)}$$

para o par

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

e

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{(VIII.1.37)}$$

para o par

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Desta forma vemos que o campo eletromagnético (EM) na sua rotação covariante exibe a invariânca por transformações de Lorentz (TL) explicitamente, ou seja, as equações que regem a dinâmica do campo EM são invariantes em sua forma com respeito a diferentes observadores cujos referenciais estejam relacionados por TL's. O tensor $F^{\alpha\beta}$ assim como a quadricorrente J^α relacionam-se, entre os diferentes referenciais, segundo a TL considerada, ou seja

$$F'^{\alpha\beta}(x') = \Lambda^\alpha{}_\gamma \Lambda^\beta{}_\lambda F^{\gamma\lambda}\left(\Lambda^{-1}x'\right)$$

e

$$J'^\alpha(x') = \Lambda^\alpha{}_\gamma J^\gamma\left(\Lambda^{-1}x'\right). \quad \text{(VIII.1.36)}$$

VIII.2) Equações de onda relativísticas

a)Equação de Klein-Gordon (KG)

Como sabemos a equação de Schrödinger é obtida através da hamiltoniana clássica $H = p^2/2m + V(\mathbf{r})$ onde $\mathbf{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ e $H \to i\hbar\partial/\partial t$. Desta forma, lembrando que a energia relativística de uma partícula livre é dada por

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2$$

onde

$$\begin{aligned} p^\mu &= \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \\ \Rightarrow \frac{E^2}{c^2} - p^2 &= m^2c^2 \\ \text{ou} \qquad E^2 &= m^2c^4 + p^2c^2, \quad \text{(VIII.2.1)} \end{aligned}$$

podemos tentar a mesma substituição que anteriormente e temos

$$\begin{aligned} -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= -\hbar^2c^2\nabla^2\psi + m^2c^4\psi \\ \Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \nabla^2\psi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi &= 0 \end{aligned}$$

ou ainda

$$\Box\psi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi = 0 \quad \text{(VIII.2.2)}$$

que é a *equação de Klein-Gordon*(KG). Note que $\hbar/mc \equiv \lambda_c$ é o comprimento de onda Compton da partícula. Esta equação, entretanto, apresenta alguns inconvenientes.

i) É uma equação de 2ª ordem no tempo $\Rightarrow$ conhecimento de $\psi(\mathbf{r}, 0)$ não é suficiente para determinarmos $\psi(\mathbf{r}, t)$.

ii) Soluções do tipo $\psi(\mathbf{r}, t) = e^{ip^\mu x_\mu/\hbar} = e^{i/\hbar(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}$ admitem energias $E = \pm\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$, ou seja, $\exists$ solução de $E < 0$!

iii) A densidade de probabilidade não é positiva definida pois

$$\begin{aligned} \psi^*\left(\Box + \lambda_c^{-2}\right)\psi - \psi\left(\Box + \lambda_c^{-2}\right)\psi^* &= 0 \\ \Rightarrow \partial^\mu\left(\psi^*\partial_\mu\psi - \psi\partial_\mu\psi^*\right) &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)\right] + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right)\right] = 0$$

ou

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0 \quad \text{(VIII.2.3)}$$

onde

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right] = \rho^*$$

não é uma grandeza positiva definida.

Assim, face a tantos inconvenientes, deve-se buscar uma outra equação que substitua a (VIII.2.2) e não sofra das mesmas deficiências.

b) Equação de Dirac (ED)

A fim de encontrar uma alternativa que não apresentasse os defeitos da equação de KG, Dirac propôs uma equação linear em ∂_t da forma

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + \beta mc^2\psi \equiv H\psi, \quad \text{(VIII.2.4)}$$

onde $\psi = [\psi_1 \dots \psi_N]$ e α_i e β são matrizes $N\times N$ para que possamos ter a invariância desejada. Caso ψ não tivesse N componentes, a ED não seria invariante nem segundo rotações.

Para que a ED represente uma equação relativística é necessário que

$$\Box\psi_\alpha + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\psi_\alpha = 0. \quad \text{(VIII.2.5)}$$

Iterando a ED temos

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\sum_{ij}\left(\frac{\alpha_j\alpha_i+\alpha_i\alpha_j}{2}\right)\partial^2_{ij}\psi + \sum_i\frac{\hbar mc^3}{i}\left(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i\right)\partial_i\psi + \beta^2m^2c^4\psi. \quad \text{(VIII.2.6)}$$

Para reproduzir a (VIII.2.5) precisamos que

$$\left.\begin{array}{c}\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik}\\ \alpha_i\beta+\beta\alpha_i = 0\\ \alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1}\end{array}\right\}\text{(VIII.2.7)}$$

Como $\alpha_i\beta+\beta\alpha_i = 0$ temos $\alpha_i\beta = -\beta\alpha_i$ e

$$\begin{aligned}\det\alpha_i\beta &= \det(-\mathbb{1})\det\alpha_i\beta\\ \Rightarrow \det(-\mathbb{1}) &= +1 \quad \text{(VIII.2.8)}\\ \Rightarrow (-1)^N &= 1 \;\Rightarrow\; N \text{ é par.}\end{aligned}$$

Se $N=2$, podemos acomodar apenas 3 matrizes 2×2 que anticomutam; σ_1, σ_2 e σ_3. Então, façamos $N=4$. Seja, então

$$\alpha_i = \begin{pmatrix}0 & \sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{pmatrix}$$

e

$$\beta = \begin{pmatrix}\mathbb{1} & 0\\ 0 & -\mathbb{1}\end{pmatrix} \quad \text{(VIII.2.9)}$$

Esta escolha satisfaz a (VIII.2.7).

Se agora calcularmos $\psi^\dagger H\psi - \psi H\psi^\dagger$ teremos

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0$$

onde

$$\begin{aligned}\rho &= \psi^\dagger\psi\\ &= \sum_{\alpha=1}^{4}\psi^*_\alpha\psi_\alpha > 0\end{aligned}$$

e

$$j^k = c\psi^\dagger\alpha^k\psi. \quad \text{(VIII.2.10)}$$

Aqui, evidentemente, ρ é positivo definido!

Partícula em repouso

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \beta mc^2\psi \\
\Rightarrow \psi_1 &= e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \\
\psi_2 &= e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \\
\psi_3 &= e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \\
\psi_4 &= e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad \textbf{(VIII.2.11)}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ ainda há soluções com energia negativa. Vamos, por enquanto, estudar apenas as soluções aceitáveis, ou seja, as de $E > 0$.

Partícula no campo E.M.

Na presença do potencial E.M. $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ o acoplamento a uma particula carregada é obtido através da substituição

$$p^\mu \to p^\mu - e\frac{A^\mu}{c} \qquad \text{(VIII.2.12)}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \left\{c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\mathbf{p} - e\frac{\mathbf{A}}{c}\right) + \beta mc^2 + e\phi\right\}\psi \\
\Rightarrow i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} - e\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{A}\psi + e\phi\psi + \beta mc^2\psi \qquad \text{(VIII.2.13)}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow c\boldsymbol{\alpha}$ aparece como um operador velocidade $\mathbf{v}_{op}$ em H. Por outro lado,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, \mathbf{r}] = c\boldsymbol{\alpha}. \qquad \text{(VIII.2.14)}$$

também confirma esta comparação.

Se $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}/c$ temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{e}{c}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{A} \\
&= \frac{i}{\hbar}[H, \mathbf{p}] - \frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - e\left(\alpha\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{A},
\end{aligned}
$$

que após alguma manipulação nos dá

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_{op}}{c}\times\mathbf{B}\right), \qquad \text{(VIII.2.15)}$$

que é basicamente a equação de Lorentz em forma de operador.

Limite não relativístico da ED

Seja $\psi = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \tilde{\chi} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix} + e\phi \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} + mc^2 \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{bmatrix}.$$

Tentemos a solução $\psi = e^{-imc^2 t/\hbar} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \chi \\ \varphi \end{bmatrix} + e\phi \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} - 2mc^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}\chi + e\phi\varphi \\ i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}\varphi + e\phi\chi - 2mc^2\chi \end{cases} \quad \text{(VIII.2.16)}$$

Se $\chi = \chi_0 e^{-iE_0 t/\hbar}$ temos

$$\begin{aligned} E\chi &= c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}\varphi + e\phi\chi - 2mc^2\chi \\ \Rightarrow \left[E - e\phi + 2mc^2\right]\chi &= c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}\varphi \end{aligned}$$

Como $E, e\phi \ll mc^2$, $\chi \approx c\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{2mc^2}\varphi$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{2m}\varphi + e\phi\varphi \quad \text{(VIII.2.17)}$$

Usando que $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ podemos escrever

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 &= \pi^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}) \\ &= \pi^2 - \frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + e\phi \right\} \varphi$$

No caso de campo uniforme $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ e $\phi = 0$ temos, até 1ª ordem em $\mathbf{B}$,

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left\{ \frac{p^2}{2m} + \frac{e}{2mc}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} \right\} \varphi \quad \text{(VIII.2.18)}$$

que é a chamada *equação de Pauli* que descreve a dinâmica não-relativística de uma partícula com momento angular orbital $\mathbf{L}$ e spin $\mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ e portanto de um férmion com o fator giromagnético $g = 2$.