Invariância relativística da ED

Para discutir a invariância relativística da ED devemos escrevê-la de forma mais conveniente. Definindo $\gamma^0 \equiv \beta$ e $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$ temos

$$i\hbar\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0}+\gamma^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\gamma^2\frac{\partial}{\partial x^2}+\gamma^3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\psi - mc\psi = 0$$

onde $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, $\gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}$ e $\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix}$. (VIII.2.19)

Convém notar que $\sigma^i = \sigma_i$ com $i = 1,2,3$.

Introduzindo a notação $\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu = \gamma^0 A_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}$ temos

$$\begin{aligned} \not{\partial} &= \gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} \\ \Rightarrow (i\hbar\not{\partial} - mc)\,\psi &= 0, \end{aligned}$$

ou

$$\left\{\left(i\hbar\not{\partial} - \frac{e\not{A}}{c}\right) - mc\right\}\psi = 0, \quad \text{(VIII.2.20)}$$

se a partícula está sujeita a um campo EM.

Queremos encontrar a transformação $S(\Lambda)$, onde Λ é a TL $x' = \Lambda x$, que deixa a ED invariante, ou seja, a representação da TL que opera nos ψ's.

Devemos ter no novo referencial

$$\left(i\hbar\gamma'^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc\right)\psi'(x') = 0,$$

onde $\{\gamma'^\mu,\gamma'^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.

Pode-se mostrar que a ED é obedecida $\forall\ \gamma'^\mu = U^\dagger\gamma^\mu U$ onde $U^\dagger = U^{-1}$ $\Rightarrow$ podemos ignorar a distinção entre γ'^μ e γ^μ.

Queremos encontrar $S(\Lambda)$ tal que

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= S(\Lambda)\,\psi(x) \\ &= S(\Lambda)\,\psi\left(\Lambda^{-1}x'\right) \\ \Rightarrow \psi(x) &= S^{-1}(\Lambda)\,\psi'(x') \\ &= S^{-1}(\Lambda)\,\psi'(\Lambda x). \quad \text{(VIII.2.22)} \end{aligned}$$

Podemos ainda escrever

$$\begin{aligned} \psi(x) &= S\left(\Lambda^{-1}\right)\psi'(x') \\ &= S\left(\Lambda^{-1}\right)\psi'(\Lambda x), \quad \text{(VIII.2.23)} \end{aligned}$$

que comparada à (VIII.2.22) nos leva a

$$S^{-1}(\Lambda) = S\left(\Lambda^{-1}\right). \quad \text{(VIII.2.24)}$$

No referencial $\underline{0}$ a ED pode ser escrita como

$$\begin{aligned} (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\,\psi(x) &= 0 \\ \Rightarrow \left(i\hbar\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\,\partial_\mu - mcS^{-1}(\Lambda)\right)S(\Lambda)\,\psi &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ i\hbar\gamma^{\mu} S^{-1}(\Lambda) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - mcS^{-1}(\Lambda) \right\} \psi'(x') = 0 \quad \text{(VIII.2.24)}$$

$$\Rightarrow \left\{ i\hbar S(\Lambda)\gamma^{\mu} S^{-1}(\Lambda) \underbrace{\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}}_{\Lambda^{\nu}{}_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} - mc \right\} \psi'(x') = 0 \quad \text{(VIII.2.25)}$$

que, por sua vez, deve ser igual à (VIII.2.21), o que nos leva a

$$\begin{aligned} S(\Lambda)\gamma^{\mu} S^{-1}(\Lambda)\Lambda^{\nu}{}_{\mu} &= \gamma^{\nu} \\ \Rightarrow S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu} S(\Lambda) &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}. \quad \text{(VIII.2.26)} \end{aligned}$$

Vamos construir S a partir de TL's infinitesimais:

$$\begin{matrix} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + (\Delta\omega)^{\mu}{}_{\nu} \\ \left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}{}_{\sigma} = \delta^{\nu}{}_{\sigma} + \left(\Delta^{-1}\omega\right)^{\nu}{}_{\sigma} \end{matrix} \quad \text{(VIII.2.27)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}{}_{\sigma} &= \delta^{\mu}{}_{\nu}\delta^{\nu}{}_{\sigma} + \delta^{\mu}{}_{\nu}\left(\Delta^{-1}\omega\right)^{\nu}{}_{\sigma} + \delta^{\nu}{}_{\sigma}(\Delta\omega)^{\mu}{}_{\nu} + \mathcal{O}\left(\Delta\omega^{2}\right) \\ &= \delta^{\mu}{}_{\sigma} + \left(\Delta^{-1}\omega\right)^{\mu}{}_{\sigma} + (\Delta\omega)^{\mu}{}_{\sigma} + \mathcal{O}\left(\Delta\omega^{2}\right) \\ &= \delta^{\mu}{}_{\sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\Delta^{-1}\omega\right)^{\mu}{}_{\nu} &= -(\Delta\omega)^{\mu}{}_{\nu} \\ \Rightarrow \left(\Delta^{-1}\omega\right)^{\mu}{}_{\sigma} g^{\sigma\nu} &= (-\Delta\omega)^{\mu}{}_{\sigma} g^{\sigma\nu} \\ \Rightarrow \left(\Delta^{-1}\omega\right)^{\mu\nu} &= -(\Delta\omega)^{\mu\nu}. \quad \text{(VIII.2.28)} \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} g\tilde{\Lambda}g &= \Lambda^{-1} \\ \Rightarrow \widetilde{\Lambda g} &= \Lambda^{-1}g \\ \Rightarrow \widetilde{(\Delta\omega)^{\mu}{}_{\sigma} g^{\sigma\nu}} &= \left(\Delta^{-1}\omega\right)^{\mu}{}_{\sigma} g^{\sigma\nu} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta\omega}^{\mu\nu} &= \left(\Delta^{-1}\omega\right)^{\mu\nu} \\ \Rightarrow \left(\Delta^{-1}\omega\right)^{\mu\nu} &= (\Delta\omega)^{\nu\mu} \end{aligned}$$

que pela (VIII.2.28) nos dá

$$(\Delta\omega)^{\mu\nu} = -(\Delta\omega)^{\nu\mu}. \quad \text{(VIII.2.29)}$$

Portanto, S deve ter a forma

$$S \cong \mathbb{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\Delta\omega)^{\mu\nu}$$

onde $\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$ é 4×4 e, portanto,

$$S^{-1} \cong \mathbb{1} + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\Delta\omega)^{\mu\nu}. \quad \text{(VIII.2.30)}$$

Mas, por (VIII.2.26), $S^{-1}\gamma^{\mu}S = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$

$$\Rightarrow \left\{ \mathbb{1} + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\Delta\omega)^{\mu\nu} \right\} \gamma^{\mu} \left\{ \mathbb{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}(\Delta\omega)^{\mu\nu} \right\} = \gamma^{\mu} + (\Delta\omega)^{\mu\nu} g_{\nu\rho}\gamma^{\rho} \quad \text{(VIII.2.31)}$$

$$\Rightarrow 2i\left(\delta^{\nu}{}_{\alpha}\gamma_{\beta} - \delta^{\nu}{}_{\beta}\gamma_{\alpha}\right) = \left[\gamma^{\nu}, \sigma_{\alpha\beta}\right] \quad \text{(VIII.2.32)}$$

As matrizes $\sigma_{\alpha\beta}$ que satisfazem a álgebra (VIII.2.32) são do tipo

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\right]$$

onde

$$\gamma_{\mu} = g_{\mu\nu}\gamma^{\nu} \quad \text{(VIII.2.33)}$$

e, portanto, calculando os comutadores teremos

$$\sigma_{ij} = \epsilon_{ijk}\begin{bmatrix}\sigma^k & 0\\ 0 & \sigma^k\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \sigma_{0i} = -\sigma_{i0} = i\alpha_i = i\begin{bmatrix}0 & \sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{bmatrix}. \quad \text{(VIII.2.34)}$$

Este resultado nos permite escrever

$$\begin{aligned}
S &\approx \mathbb{1} - \frac{i}{4}\left[\sigma_{0j}\left(\Delta\omega\right)^{0j} + \sigma_{j0}\left(\Delta\omega\right)^{j0} + \sigma_{ij}\left(\Delta\omega\right)^{ij}\right]\\
S &\approx \mathbb{1} - \frac{i}{4}\left[2\sigma_{j0}\left(\Delta\omega\right)^{j0} + \epsilon_{ijk}\left(\Delta\omega\right)^{ij}\sigma^k\right]\\
S &\approx \mathbb{1} - \frac{i}{2}\left[i\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{\beta}}\Delta\beta + \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\Delta\theta\right]\\
\Rightarrow S &= \exp -\frac{i}{2}\left[i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega}\right] \quad \text{(VIII.2.35)}
\end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{\omega} = \theta\,\hat{\boldsymbol{\omega}},\ \boldsymbol{\zeta} = \left(\tanh^{-1}\beta\right)\hat{\boldsymbol{\beta}}$ e $\beta = v/c$. Portanto,

$$\begin{aligned}
S^{-1} &= \exp\frac{i}{2}\left[i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega}\right] \qquad \text{e} \qquad S^{\dagger} = \exp\frac{i}{2}\left[-i\boldsymbol{\alpha}^{\dagger}\cdot\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\sigma}^{\dagger}\cdot\boldsymbol{\omega}\right] =\\
&= \exp\frac{i}{2}\left[-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega}\right] \neq S^{-1}. \quad \text{(VIII.2.36)}
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\gamma_0 S^{\dagger}\gamma_0 &= \exp\frac{i}{2}\left[-i\gamma_0\boldsymbol{\alpha}\gamma_0\cdot\boldsymbol{\zeta} + \gamma_0\boldsymbol{\sigma}\gamma_0\cdot\boldsymbol{\omega}\right] = \exp\frac{i}{2}\left[i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega}\right] = S^{-1}\\
&\Rightarrow \quad S^{-1} = \gamma_0 S^{\dagger}\gamma_0. \quad \text{(VIII.2.37)}
\end{aligned}$$

Assim vemos que S não é unitária e que se relaciona com $S^{\dagger}$ através de (VIII.2.37).

A densidade de probabilidade $J^{\mu} = c\,\psi^{\dagger}\gamma^0\gamma^{\mu}\psi$ se transforma segundo TLs como

$$\begin{aligned}
J'^{\mu}(x') &= c\,\psi'^{\dagger}(x')\gamma^0\gamma^{\mu}\psi'(x') = c\,\psi^{\dagger}(x)S^{\dagger}\gamma^0\gamma^{\mu}S\psi(x)\\
&= c\,\psi^{\dagger}(x)\gamma^0 S^{-1}\gamma^{\mu}S\psi(x) = c\,\psi^{\dagger}(x)\gamma^0 a^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}S\psi(x)\\
&= a^{\mu}{}_{\nu}J^{\nu}(x), \quad \text{(VIII.2.38)}
\end{aligned}$$

onde usamos $a^{\mu}{}_{\nu} \equiv \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$. Daqui em diante usaremos uma ou outra notação equivalentemente.

A combinação $\psi^{\dagger}(x)\,\gamma^0\,\psi(x)$ é obviamente um escalar segundo TLs. Assim, definindo $\psi^{\dagger}\gamma^0 \equiv \overline{\psi}(x)$ temos que $\overline{\psi}(x)\psi(x)$ é um escalar. Não confundir com $\psi^{\dagger}(x)\,\psi(x)$ que se transforma como a componente zero de um quadrivetor.

Reflexão espacial

Este é um exemplo de TL imprópria. Nesta transformação temos: $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$ e $t' = t \Rightarrow a^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\nu}$. Como $S^{-1}\gamma^{\mu}S = a^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$ devemos ter para $S = P$ (paridade) $P^{-1}\gamma^{\mu}P = g^{\mu\nu}\gamma^{\nu}$ que é satisfeita se $P = e^{i\varphi}\gamma_0$ e a transformação se escreve como

$$\psi'(x') = e^{i\varphi}\gamma_0\psi(x) \quad \text{(VIII.2.39)}$$

Para uma partícula em repouso, as soluções de $E > 0$ são tais que $\gamma_0\psi_{1,2} = \psi_{1,2}$ e $\gamma_0\psi_{3,4} = -\psi_{3,4}$.

Bilineares covariantes

É possível formar produtos linearmente independentes (LI) de matrizes γ com propriedades específicas segundo TLs. Denotamos estas matrizes por $\Gamma^{(n)}_{\alpha\beta}$. Estas matrizes são as seguintes:

$$\Gamma^{(S)} = \mathbb{1}, \qquad \Gamma^{(V)}_\mu = \gamma_\mu, \qquad \Gamma^{(T)}_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$
$$\Gamma^{(P)} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5 = \gamma_5 \qquad \text{e} \qquad \Gamma^{(A)}_\mu = \gamma_5\gamma_\mu. \quad \text{(VIII.2.40)}$$

Estas 16 matrizes são LI; $\sum_n a_n\Gamma^{(n)} = 0 \;\Rightarrow\; a_n = 0$ e $\{\Gamma^{(n)}\}$ formam uma base para o espaço vetorial das matrizes 4×4.

Vamos investigar como se transformam as quantidades $\overline{\psi}(x)\,\Gamma^{(n)}\,\psi(x)$. Tomemos, por exemplo, $\overline{\psi}(x)\,\gamma_5\,\psi(x)$.

$$\begin{aligned} & \overline{\psi'}(x')\,\gamma_5\,\psi'(x') \;=\; \overline{\psi}(x)\,S^{-1}\,\gamma_5\,S\,\psi(x) = \; i\overline{\psi}(x)\,S^{-1}\,\gamma^0\,S\,S^{-1}\,\gamma^1\,S\,S^{-1}\,\gamma^2\,SS^{-1}\,\gamma^3\,S\psi(x) = \\ = \;\; & i\overline{\psi}(x)\,a^0{}_\nu\,\gamma^\nu\,a^1{}_\rho\,\gamma^\rho\,a^2{}_\sigma\,\gamma^\sigma\,a^3{}_\lambda\,\gamma^\lambda\psi(x) = \; a^0{}_\nu\,a^1{}_\rho\,a^2{}_\sigma\,a^3{}_\lambda\,i\,\overline{\psi}(x)\,\gamma^\nu\,\gamma^\rho\,\gamma^\sigma\,\gamma^\lambda\,\psi(x) = \\ = \;\; & \epsilon^{\nu\rho\sigma\lambda}a^0{}_\nu\,a^1{}_\rho\,a^2{}_\sigma\,a^3{}_\lambda\,\overline{\psi}(x)\,\gamma_5\,\psi(x) = \det\Lambda\,\overline{\psi}(x)\,\gamma_5\,\psi(x) \quad \text{(VIII.2.41)} \end{aligned}$$

o que implica que $\overline{\psi}(x)\,\gamma_5\,\psi(x)$ é um pseudo-escalar. Da mesma forma pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} &\overline{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x) \quad \text{é um vetor,} \\ &\overline{\psi}(x)\,\gamma_5\,\gamma^\mu\,\psi(x) \quad \text{é um pseudo-vetor e} \\ &\overline{\psi}(x)\,\sigma_{\mu\nu}\,\psi(x) \quad \text{é um tensor antissimétrico.} \end{aligned}$$

Algumas identidades úteis envolvendo as matrizes γ são:

$$\begin{aligned} &\gamma^\mu\gamma_\mu = 4 \\ &\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu \\ &\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} \\ &\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu \quad \text{(VIII.2.42)} \end{aligned}$$

Soluções da ED

Vamos agora resolver a equação

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)\psi = 0,$$

tentando soluções do tipo

$$\psi = e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar}u(\mathbf{p}) \quad \Rightarrow \quad (\gamma^\mu p_\mu - mc)\,u(\mathbf{p}) = 0,$$

ou ainda,

$$(p_0 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} - \beta mc)\,u(\mathbf{p}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E\,u(\mathbf{p}) = c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}\,u(\mathbf{p}) + \beta mc^2\,u(\mathbf{p}),$$

onde

$$u(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} u_1(\mathbf{p}) \\ u_2(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad u_1(\mathbf{p}) \quad \text{e} \quad u_2(\mathbf{p})$$

são spinores de duas componentes. Assim,

$$E\begin{bmatrix}u_1(\mathbf{p})\\u_2(\mathbf{p})\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(\mathbf{p})\\u_2(\mathbf{p})\end{bmatrix}+mc^2\begin{bmatrix}\mathbb{1} & 0\\0 & -\mathbb{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(\mathbf{p})\\u_2(\mathbf{p})\end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}(E-mc^2)\,u_1(\mathbf{p}) &= c\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,u_2(\mathbf{p}) \quad \text{e}\\ (E+mc^2)\,u_2(\mathbf{p}) &= c\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,u_1(\mathbf{p}). \quad \text{(VIII.2.43)}\end{aligned}$$

multiplicando a primeira de (VIII.2.43) por $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}$ e usando o resultado na segunda delas teremos, como esperado, o resultado $E^2=p^2c^2+m^2c^4$ ou $E=\pm\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$.

Vamos assumir que o subespaço bidimensional gerado por $u_1(\mathbf{p})$ corresponda a $E>0$ enquanto que o gerado por $u_2(\mathbf{p})$ corresponda a $E<0$.

Escolhendo para $E>0$ a base

$$u_1^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad u_1^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

temos

$$u^{(1)}(\mathbf{p})=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+mc^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad u^{(2)}(\mathbf{p})=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+mc^2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

Escolhendo para $E<0$

$$u_2^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad u_2^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

temos

$$v^{(1)}(-\mathbf{p})=\begin{bmatrix}\frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E-mc^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad v^{(2)}(-\mathbf{p})=\begin{bmatrix}\frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E-mc^2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

Note que se $E<0$, $E=-|E|$ e os spinores $v^{(1)}(\mathbf{p})$ e $v^{(2)}(\mathbf{p})$ são auto estados de (VIII.2.43) correspondendo a uma solução do tipo

$$\begin{aligned}\psi &= e^{+ip_\mu x^u/\hbar}u(\mathbf{p})\\ &= u(\mathbf{p})\,e^{\frac{i}{\hbar}(|E|t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}\end{aligned}$$

ou seja, spinores de energia $-|E|$ e momento linear $-\mathbf{p}$. Portanto, podemos escrever

$$v^{(1)}(\mathbf{p})=\begin{bmatrix}\frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+mc^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad v^{(2)}(\mathbf{p})=\begin{bmatrix}\frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+mc^2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

onde agora $E>0$.

Devido à definição dos estados $\overline{\psi}=\psi^\dagger\gamma_0$ a normalização dos spinores deve ser tal que

$$\begin{aligned}\overline{u}^{(\alpha)}u^{(\beta)} &= \delta_{\alpha\beta}\\ \overline{v}^{(\alpha)}v^{(\beta)} &= -\delta_{\alpha\beta}\\ \overline{u}^{\alpha}v^{\beta} &= 0\\ \overline{v}^{(\alpha)}u^{\beta} &= 0\end{aligned}$$

Mas, desta forma

$$\begin{aligned}
u^{\dagger(\alpha)}\gamma_0 u^{(\alpha)} &= \left[\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \quad \tfrac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+mc^2}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \tfrac{-c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+mc^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{bmatrix}\\
&= 1-\frac{c^2p^2}{\left(E+mc^2\right)^2}\\
&= 1-\frac{E^2-m^2c^4}{\left(E+mc^2\right)^2}\\
&= 1-\frac{E-mc^2}{E+mc^2}\\
&= \frac{2mc}{E+mc^2}
\end{aligned}$$

Então devemos substituir u e v por

$$\begin{aligned}
u^{(r)}(\mathbf{p}) &= \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}u^{(r)}(\mathbf{p})\\
v^{(r)}(\mathbf{p}) &= \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}v^{(r)}(\mathbf{p}).
\end{aligned}$$

Após esta substituição teremos

$$\begin{aligned}
u^{\dagger(\alpha)}u^{(\alpha)} &= \left(1+\frac{p^2c^2}{\left(E+mc^2\right)^2}\right)\frac{E+mc^2}{2mc^2}\\
&= \left(1+\frac{E-mc^2}{E+mc^2}\right)\frac{E+mc^2}{2mc^2}\\
&= \frac{E}{mc^2}.
\end{aligned}$$

Mas, como $\psi^\dagger\psi$ é uma densidade de probabilidade , temos que normalizar o produto $u^\dagger u$, o que nos leva a

$$\begin{aligned}
u^{(r)}(\mathbf{p}) &\to \sqrt{\frac{mc^2}{E}}u^{(r)}(\mathbf{p})\\
v^{(r)}(\mathbf{p}) &\to \sqrt{\frac{mc^2}{E}}v^{(r)}(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

Para simplificar podemos escrever as soluções como $w^{(r)}(\mathbf{p})$ onde $w^{(1)}(\mathbf{p}) = u^{(1)}(\mathbf{p})$, $w^{(2)}(\mathbf{p}) = u^{(2)}(\mathbf{p})$, $w^{(3)}(\mathbf{p}) = v^{(1)}(\mathbf{p})$ e $w^{(4)}(\mathbf{p}) = v^{(2)}(\mathbf{p})$ e

$$(\not{p}-\epsilon_r mc)\, w^{(r)}(\mathbf{p}) = 0 \quad \text{e} \quad \overline{w}^{(r)}(\mathbf{p})\,(\not{p}-\epsilon_r mc) = 0 \quad \text{(VIII.2.44)}$$

onde $\epsilon_r = 1$ se $r = 1,2$ e -1 se $r = 3,4$ e, através das quais, podemos facilmente constatar as relações de ortogonalidade

$$w^{(r)\dagger}(\epsilon_r\mathbf{p})w^{(r')}(\epsilon_{r'}\mathbf{p}) = \frac{E}{mc^2}\delta_{rr'}$$

e completeza

$$\sum_{r=1}^{4}\epsilon_r w_\alpha^{(r)}(\mathbf{p})\,\overline{w}_\beta^{(r)}(\mathbf{p}) = \delta_{\alpha\beta}. \quad \text{(VIII.2.45)}$$

Operadores de projeção de energia e spin

Nesta seção vamos introduzir alguns operadores muito úteis na manipulação dos spinores de Dirac.

Consideremos a ação dos operadores $\Lambda_r(p) = (\epsilon_r \not{p} + mc)/2mc$ nos spinores de Dirac. Temos, então, os dois operadores

$$\Lambda_\pm = \frac{\pm\not{p} + mc}{2mc} \quad \text{(VII.2.46)}$$

que quando aplicados um sobre o outro nos dão

$$\Lambda_r(p)\,\Lambda_{r'}(p) = \frac{m^2c^2\left(1+\epsilon_r\epsilon_{r'}\right) + mc\not{p}\left(\epsilon_r+\epsilon_{r'}\right)}{4m^2c^2}$$

pois

$$\begin{aligned}
\not{p}\not{p} &= \gamma^\mu\partial_\mu\gamma^\nu\partial_\nu \\
&= \left(\frac{\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu}{2}\right)\partial_\mu\partial_\nu \\
&= g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \\
&= \partial^\mu\partial_\nu \\
&= m^2c^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Lambda_r(p)\,\Lambda_{r'}(p) = \frac{1+\epsilon_r\epsilon_{r'}}{2}\Lambda_r(p) \quad \text{(VIII.2.47)}$$

ou

$$\begin{aligned}
\Lambda_+^2 &= \Lambda_+ \\
\Lambda_-^2 &= \Lambda_- \\
\Lambda_+\Lambda_- &= \Lambda_-\Lambda_+ = 0 \\
\Lambda_+ + \Lambda_- &= \mathbb{1}
\end{aligned}$$

que implica em

$$\begin{aligned}
\Lambda_+(p)\,u^{(\alpha)}(p) &= \frac{\not{p}+mc}{2mc}u^{(\alpha)}(p) \\
&= \frac{2mc}{2mc}u^{(\alpha)}(p)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \Lambda_+(p) \text{ projeta sobre os estados de } E>0 \quad \text{e} \\ \Lambda_-(p) \text{ projeta sobre os estados de } E<0. \end{array}$$

No caso de spinores bidimensionais definimos o seu estado de polarização $|\hat{\mathbf{n}}\rangle$ através da relação $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}|\hat{\mathbf{n}}\rangle = |\hat{\mathbf{n}}\rangle$. No caso particular de polarização na direção $\hat{\mathbf{z}}$ temos $\sigma_z|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$ e $\sigma_z|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$, o que nos permite definir projetores ao longo das direções de polarização como

$$\frac{1+\sigma_z}{2}|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \quad \text{e} \quad \frac{1-\sigma_z}{2}|\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle$$

Então para spinores $w^{(r)}(0)$ (em repouso) teríamos

$$\left(\frac{1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}_r}{2}\right)w^{(r)}(0) = w^{(r)}(0)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_r = \begin{cases} \hat{\mathbf{z}} & \text{se } r=1,3 \\ -\hat{\mathbf{z}} & \text{se } r=2,4 \end{cases}$$

Entretanto esta forma não é relativisticamente invariante.

Denotemos os quadrivetores no referencial onde a partícula está em repouso por $\check{\mathbf{V}} = (V^0, V^1, V^2, V^3)$. Sejam $\check{\mathbf{n}}_z = (0,0,0,1)$; $\check{n}_z^3 = 1 \Rightarrow n_z^\mu = a^\mu{}_\nu \check{n}_z^\nu$ e $\check{\mathbf{p}} = (mc, \mathbf{0})$; $\check{p}^0 = mc \Rightarrow p^\mu = a^\mu{}_\nu \check{p}^\nu$ e $n_z^\mu p_\mu = 0$. Na realidade todas as considerações que faremos abaixo valem para qualquer quadrivetor $\check{s}^\mu = (0, \check{\mathbf{s}})$ que obviamente obedece a $s^\mu p_\mu = 0$.

Então, podemos dizer que $(\mathbb{1} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \check{\mathbf{n}}_z)/2$ é o projetor do spin na direção $\hat{z}$ quando a partícula está em repouso. No caso dos spinores de Dirac precisamos escrever $(I + \sigma_z)/2$ na forma de um produto escalar como no exemplo acima. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{1} + \sigma_z}{2} &= \frac{\begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix}}{2} \\
&= \frac{\mathbb{1} + \gamma_5 \gamma_3 \check{n}_z^3 \gamma_0}{2} \\
&= \frac{\mathbb{1} + \gamma_5 \check{\not{n}}_z \gamma_0}{2}
\end{aligned}$$

que nos induz (eliminando γ_0 que é uma multiplicação por ± 1) à seguinte forma invariante

$$\Sigma(n_z) = \frac{1 + \gamma_5 \not{n}_z}{2} \quad \text{ou} \quad \Sigma(s) = \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2} \qquad \text{(VIII.2.48)}$$

No referencial em repouso temos

$$\begin{aligned}
\Sigma(\check{n}_z) w^{(1)}(0) &= \frac{1 + \gamma_s \check{\not{n}}_z}{2} w^{(1)}(0) \\
&= \frac{1 + \sigma_z}{2} w^{(1)}(0) \\
&= w^{(1)}(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma(-\check{n}_z) w^{(2)}(0) &= \frac{1 - \sigma_z}{2} w^{(2)}(0) \\
&= w^{(2)}(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma(-\check{n}_z) w^{(3)}(0) &= \frac{1 - \gamma_5 \gamma_3}{2} w^{(3)}(0) \\
&= \frac{1 + \gamma_5 \gamma_3 \gamma_0}{2} w^{(3)}(0) \\
&= w^{(3)}(0)
\end{aligned}$$

$$\Sigma(\check{n}_z) w^{(4)}(0) = \frac{1 - \sigma_z}{2} w^{(4)}(0) = w^{(4)}(0)$$

Então, se definirmos $u(p, n_z)$ como a solução de $E > 0$ com polarização na direção n_z e $v(p, n_z)$ a solução de $E < 0$ com polarização na $-n_z$ (isto é, $\boldsymbol{\sigma} \cdot \check{\mathbf{n}}_z v(p, n_z) = -v(p, n_z)$) temos

$$\begin{aligned}
w^{(1)}(p) &= u(p, n_z) \\
w^{(2)}(p) &= u(p, -n_z) \\
w^{(3)}(p) &= v(p, -n_z) \\
w^{(4)}(p) &= v(p, n_z)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Sigma(s) u(p,s) = u(p,s) \\ \Sigma(s) v(p,s) = v(p,s) \\ \Sigma(-s) u(p,s) = \Sigma(-s) v(p,s) = 0 \end{cases} \qquad \text{(VIII.2.49)}$$

Pacotes de onda

Vamos, inicialmente, considerar a superposição das componentes de energia $E > 0$.

$$\psi^{(+)}(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \sum_{\mp s} b(\mathbf{p},s)\, u(\mathbf{p},s)\, e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar} \quad \text{(VIII.2.50)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int \psi^{(+)\dagger}(\mathbf{x},t)\,\psi^{(+)}(\mathbf{x},t)\,d^3x &= \int d^3p \frac{mc^2}{E} \sum_{ss'} b^*(\mathbf{p},s)\, b(\mathbf{p},s')\, u^\dagger(\mathbf{p},s)\, u(\mathbf{p},s') \\
&= \int d^3p \sum_s |b(\mathbf{p},s)|^2 = 1.
\end{aligned}$$

A densidade de corrente média neste estado é dada por

$$\mathbf{J}^{(+)} = \int \psi^{(+)\dagger}(\mathbf{x},t)\; c\boldsymbol{\alpha}\, \psi^{(+)}(\mathbf{x},t)\, d^3x$$

e poderia ser calculada diretamente com o auxílio de (VIII.2.50). Entretanto, podemos usar uma decomposição particular da densidade de corrente que, além de facilitar o cálculo, ainda nos dá uma nova interpretação física para este operador.

Vamos começar notando que a ED da partícula livre pode ser escrita como $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = \kappa\psi$ onde $\kappa \equiv \lambda_c^{-1}$ é o inverso do comprimento de onda Compton da partícula. Assim, se ψ é solução da ED, temos,

$$\psi = \frac{i}{\kappa}\gamma^\nu \frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} \quad \text{e consequentemente} \quad \overline{\psi} = -\frac{i}{\kappa}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^\nu}\gamma^\nu.$$

Como a densidade de corrente é dada por $c\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$, podemos escrever metade dela usando ψ dado pela primeira expressão acima e a sua segunda metade com $\overline{\psi}$ dado pela segunda expressão acima. Desta forma teremos,

$$J^\mu = \frac{i\hbar}{2m}\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^\nu}\gamma^\nu\gamma^\mu\psi\right).$$

Usando as relações de anticomutação (VIII.2.19) e a definição (VIII.2.33) para $\sigma_{\mu\nu}$ podemos escrever

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu}{2} + \frac{\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu}{2} = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$$

e, portanto,

$$J^\mu = J^\mu_{\text{pol}} + J^\mu_{\text{conv}} \quad \text{onde} \quad J^\mu_{\text{pol}} = \frac{\hbar}{2m}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi\right) \quad \text{e} \quad J^\mu_{\text{conv}} = \frac{i\hbar}{2m}g^{\mu\nu}\left(\overline{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^\nu}\psi\right).$$

Esta é a chamada *decomposição de Gordon* que nos mostra que a densidade de corrente pode ser escrita como a soma de uma densidade de corrente de convecção J^μ_{conv} e outra de polarização J^μ_{pol}. Aplicando esta decomposição na integral acima para $\mathbf{J}^{(+)}$ teremos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{(+)} &= \int \psi^{(+)\dagger}(\mathbf{x},t)\; c\boldsymbol{\alpha}\,\psi^{(+)}(\mathbf{x},t)\,d^3x \\
&= \int d^3p\,\mathbf{p}\frac{c^2}{E}\sum_s |b(\mathbf{p},s)|^2,
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\mathbf{J}^{(+)} = \langle c\,\boldsymbol{\alpha}\rangle^{(+)} = \left\langle \frac{c^2\mathbf{p}}{E}\right\rangle^{(+)} = \langle \mathbf{v}_g\rangle^{(+)}.$$

Assim como na teoria não relativística, a corrente média de um pacote com componentes $E>0$ é a velocidade de grupo a ele associada. Entretanto, há uma diferença na teoria relativística. O operador velocidade na nova teoria é diferente de $\mathbf{p}/m$ que é uma constante de movimento. Aqui, $[\boldsymbol{\alpha},H]\neq 0$ e, portanto, auto estados de $c\mathbf{v}_{op}=\boldsymbol{\alpha}$ devem conter as componentes de $E<0$, haja vista que os autovalores de $c\alpha_i$ são $\pm c$.

Vamos, então, construir novos pacotes da forma

$$\psi(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\sum_{\pm s}\left[b(p,s)\,u(p,s)\,e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar} + d^*(p,s)\,v(p,s)\,e^{ip_\mu x^\mu/\hbar}\right] \qquad \text{(VIII.2.51)}$$

que nos leva trivialmente à normalização

$$\begin{aligned}\int d^3x\psi^\dagger(\mathbf{x},t)\,\psi(\mathbf{x},t) &= \int d^3p\sum_{\pm}\left[|b(p,s)|^2+|d(p,s)|^2\right]\\ &= 1\end{aligned}$$

e, para a corrente, usando novamente a decomposição de Gordon teremos,

$$\begin{aligned}J^k &= \int d^3p\,\left\{\sum_{\pm s}\left[|b(p,s)|^2+|d(p,s)|^2\right]\frac{p^kc^2}{E} + i\sum_{\pm s.\pm s'} b^*(-p,s')\,d^*(p,s)\,e^{2ix_0p_0/\hbar}\overline{u}(-p,s')\,\sigma^{k0}v(p,s)\right.\\ &\left. -i\sum_{\pm s\pm s'} b(-p,s')\,d(p,s)\,e^{-2ix_0p_0/\hbar}\overline{v}(p,s')\,\sigma^{k0}u(-p,s)\right\}\end{aligned}$$

onde $u\left(\sqrt{p^2c^2+m^2c^4},-\mathbf{p},s\right)\equiv u(-p,s)$.

Assim, vemos que além do termo independente do tempo que nos fornece a velocidade de grupo, há ainda termos de interferência das componentes de energia positiva e negativa que variam numa escala de frequência dada por

$$\frac{2p_0c}{\hbar} > \frac{2mc^2}{\hbar} > 2\times 10^{21}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Este termo, conhecido como *zitterbewegung*, depende da amplitude das soluções de energia negativa presentes no pacote de onda considerado. Podemos, então, perguntar quando a influência dos termos de $E<0$ serão apreciáveis. Para tal vamos considerar um pacote gaussiano em $t=0$.

$$\psi(\mathbf{r},0,s) = \left(\frac{1}{\pi d^2}\right)^{3/4} e^{-r^2/2d^2}w^{(1)}(0)$$

$$\Rightarrow \left(\pi d^2\right)^{-3/4} e^{-r^2/2d^2}w^{(1)}(0) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\sum_s\left[b(\mathbf{p},s)\,u(\mathbf{p},s)\,e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} + d^*(\mathbf{p},s)\,v(\mathbf{p},s)\,e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\right].$$

Tomando a transformada de Fourier temos

$$\left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2}\right)^{3/4} e^{-p^2d^2/2\hbar^2}w^{(1)}(0) = \sqrt{\frac{mc^2}{E}}\sum_s\left[b(\mathbf{p},s)\,u(\mathbf{p},s) + d^*(-\mathbf{p},s)\,v(-\mathbf{p},s)\right]$$

que, com o auxílio das relações de ortogonalidade (VIII.2.45) nos leva a

$$\left.\begin{matrix} b(\mathbf{p},s)\\ d^*(-\mathbf{p},s)\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{mc^2}{E}}\left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2}\right)^{3/4} e^{-p^2d^2/2\hbar^2}\left\{\begin{matrix} u^\dagger(\mathbf{p},s)\\ v^\dagger(-\mathbf{p},s)\end{matrix}\right\} w^{(1)}(0)$$

o que implica em

$$
\begin{aligned}
b\left(\mathbf{p},+\right) \propto u^{\dagger}\left(\mathbf{p},+\right) w^{(1)}\left(0\right) &= 1 \\
b\left(\mathbf{p},-\right) \propto u^{\dagger}\left(\mathbf{p},-\right) w^{(1)}\left(0\right) &= 0 \\
d^{*}\left(-\mathbf{p},-\right) \propto v^{\dagger}\left(-\mathbf{p},-\right) w^{(1)}\left(0\right) &= \frac{p_{(-)}c}{E+mc^{2}} \\
d^{*}\left(-\mathbf{p},+\right) \propto v^{\dagger}\left(-\mathbf{p},+\right) w^{(1)}\left(0\right) &= \frac{p_{z}c}{E+mc^{2}}
\end{aligned}
$$

Então, $d^{*}\left(-\mathbf{p},s\right)$ é proporcional a $pc/(E+mc^{2})$ que é apreciável para $p \approx mc$. Mas, pelo princípio da incerteza $p \geq \hbar/d \Rightarrow$ as componentes de $E<0$ só se tornam importantes se tentarmos localizar a partícula em regiões menores que o seu comprimento de onda Compton. Este fato será fundamental na reinterpretação da equação de Dirac mais adiante.