

A Transformação de Foldy-Wouthuysen

Nosso objetivo agora será eliminar o acoplamento entre as componentes de $E > 0$ e $E < 0$, o que pode ser feito ordem a ordem no parâmetro (v/c) .

Vamos começar tratando a partícula livre. Tentemos a transformação

$$\psi' = e^{iS}\psi$$

onde $S \neq S(t)$.

De agora em diante, faremos $\hbar = c = 1$ e $\lambda_c = m^{-1}$.

Desta forma

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi'}{\partial t} &= e^{iS}H\psi \\ &= e^{iS}He^{-iS}\psi' \\ &= H'\psi' \end{aligned}$$

onde $H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m$.

O problema é análogo a diagonalizar

$$H = \sigma_x B_x + \sigma_z B_z$$

o que implica numa rotação de $\theta = \tan^{-1}(B_x/B_z)$ em torno de \hat{y} , ou seja,

$$\begin{aligned} S &= \sigma_y \frac{\theta}{2} \\ &= i\frac{\sigma_z \sigma_x \theta}{2}. \end{aligned}$$

Assim, tentemos para spinores quadridimensionais a transformação

$$\begin{aligned} e^{iS} &= e^{\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \theta(p)} \\ &= \cos |\mathbf{p}| \theta + \beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \sin |\mathbf{p}| \theta, \end{aligned}$$

onde usamos as relações de anticomutação entre as matrizes β e α_i , o que nos leva a

$$\begin{aligned} H' &= e^{iS} H e^{-iS} \\ &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \left(\cos 2|\mathbf{p}| \theta - \frac{m}{|\mathbf{p}|} \sin 2|\mathbf{p}| \theta \right) + \beta (m \cos 2|\mathbf{p}| \theta + |\mathbf{p}| \sin 2|\mathbf{p}| \theta). \quad (\text{VIII.2.52}) \end{aligned}$$

Para eliminar o termo ímpar (operador ímpar) que, por definição, é o que acopla as componentes φ e χ devemos ter

$$\begin{aligned} \tan 2|\mathbf{p}| \theta &= \frac{|\mathbf{p}|}{m} \\ \Rightarrow H' &= \beta \sqrt{p^2 + m^2} \end{aligned}$$

e separamos as componentes as componentes $E > 0$ das de $E < 0$.

A transformação geral deve executar a mesma tarefa quando tivermos H da forma

$$\begin{aligned} H &= \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - eA) + m\beta + e\phi \\ &= \mathbb{0} + m\beta + \mathbb{E} \quad (\text{VIII.2.53}) \end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \equiv \mathcal{O}$ é um operador ímpar e $\mathbb{E} \equiv e\phi$ é um operador par. Sabemos ainda que

$$\beta\mathcal{O} = -\mathcal{O}\beta$$

e

$$\beta\mathbb{E} = \mathbb{E}\beta \quad (\text{VIII.2.54})$$

Como os campos são, em geral, dependentes do tempo, vamos tentar novamente $\psi' = e^{iS}\psi$ onde agora $S = S(t)$. Assim,

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi'}{\partial t} &= \left\{ e^{iS} \left(H - i\frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS} \right\} \psi' \\ &= H'\psi' \quad (\text{VIII.2.55}) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} H' &= H + i[S, H] - \frac{1}{2}[S, [S, H]] - \frac{i}{6}[S, [S, [S, H]]] + \dots \\ &\quad - \dot{S} - \frac{i}{2}[S, \dot{S}] + \frac{1}{6}[S, [S, \dot{S}]] + \dots \quad (\text{VIII.2.56}) \end{aligned}$$

e fica evidente que não temos um operador S que elimine os operadores ímpares de H' em todas as ordens nesta expansão.

Entretanto, como no caso da partícula livre $\theta(p) \approx 1/2m$ podemos no limite não relativístico ($m \gg |\mathbf{p}|$) assumir que $S = \mathcal{O}(1/m)$ e tentar eliminar os operadores ímpares até uma determinada ordem na expansão (VIII.2.56).

Consideremos o termo $\mathcal{O}(1)$;

$$H' = \beta m + \mathbb{E} + \mathcal{O} + i[S, \beta]m,$$

e, em analogia com a partícula livre, vamos assumir

$$S = -\frac{i\beta\mathcal{O}}{2m}. \quad (\text{VIII.2.57})$$

Mantendo termos até os de $\mathcal{O}(\text{energia cinética}/m^3)$ e $\mathcal{O}(\text{energia cinética} \times \text{campo}/m^2)$ temos:

$$\begin{aligned} i[S, H] &= -\mathcal{O} + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O}, \mathbb{E}] + \frac{1}{m}\beta\mathcal{O}^2 \\ \frac{i^2}{2}[S, [S, H]] &= -\frac{\beta\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathbb{E}]] - \frac{1}{2m^2}\mathcal{O}^3 \\ \frac{i^3}{3!}[S, [S, [S, H]]] &= \frac{\mathcal{O}^3}{6m^2} - \frac{\beta\mathcal{O}^4}{6m^3} \\ \frac{i^4}{4!}[S, [S, [S, [S, H]]]] &= \frac{\beta\mathcal{O}^4}{24m^3} \\ -\dot{S} &= i\frac{\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m} \\ -\frac{i}{2}[S, \dot{S}] &= -\frac{i}{8m^2}[\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}] \end{aligned}$$

que quando levados em H' nos dão,

$$\begin{aligned} H' &= \beta \left(m + \frac{\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\mathcal{O}^4}{8m^3} \right) + \mathbb{E} - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathbb{E}]] - \frac{i}{8m^2}[\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}] + \underbrace{\frac{\beta}{2m}[\mathcal{O}, \mathbb{E}] - \frac{\mathcal{O}^3}{3m^2} + \frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m}}_{\mathcal{O}'} \\ &= \beta m + \mathbb{E}' + \mathcal{O}', \end{aligned}$$

onde constatamos a existência de operadores ímpares que são $\mathcal{O}(1/m)$. Então fazamos outra transformação idêntica à (VIII.2.55) mas com

$$S \rightarrow S' = -\frac{i\beta}{2m}\mathcal{O}' \quad (\text{VIII.2.58})$$

ao invés de (VIII.2.57). Assim teremos

$$\begin{aligned} H'' &= e^{iS'} \left(H' - i\frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS'} \\ &= \beta m + \mathbb{E}' + \frac{\beta}{2m} [\mathcal{O}', \mathbb{E}'] + i\frac{\beta\dot{\mathcal{O}}'}{2m} \\ &= \beta m + \mathbb{E}'' + \mathcal{O}'' \end{aligned}$$

onde agora $\mathcal{O}'' = \mathcal{O}(1/m^2)$ e, portanto, podemos novamente atuar com (VIII.2.55) com

$$S \rightarrow S'' = -\frac{i\beta}{2m}\mathcal{O}''$$

e assim sucessivamente. O termo resultante H''' é dado por

$$\begin{aligned} H''' &= e^{iS''} \left(H'' - i\frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS''} = \beta \left(m + \frac{\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\mathcal{O}^4}{8m^3} \right) + \mathbb{E} - \frac{1}{8m^2} [\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathbb{E}]] - \frac{i}{8m^2} [\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}] \\ &\approx \beta \left\{ m + \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \frac{p^4}{8m^3} \right\} + e\phi - \frac{e}{2m}\beta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - \frac{ie}{8m^2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \frac{e}{4m^2}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) - \frac{e}{8m^2}\nabla \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

Os termos em H''' têm as seguintes interpretações:

- Termos em $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ e $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$ são os efeitos Zeeman orbital e de spin;
- Termo em A^2 é a contribuição diamagnética para a energia;
- $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ e $\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p})$ representam a interação spin-órbita,

$$H = \frac{e}{4m^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}.$$

- Último termo: contribuição de Darwin, $\nabla^2 V/6m^2$, devida a

$$\delta V = \langle V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) \rangle \propto \frac{1}{6} \underbrace{\langle (\delta r)^2 \rangle}_{(1/m)^2} \nabla^2 V \quad (\text{VIII.2.59})$$

ou seja, como a incerteza na coordenada do elétron é da ordem de λ_c , ele vê uma correção à sua energia devida à variação do potencial coulombiano nesta escala de comprimento. Por envolver escalas de comprimento da ordem de λ_c este termo pode ser associado ao zitterbewegung.

O átomo de Hidrogênio

Vamos agora tratar um problema exatamente solúvel que é o de um elétron sujeito ao potencial coulombiano usando a equação de Dirac.

Queremos resolver

$$H\psi = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta + V(r)]\psi = E\psi$$

onde $V(r) = -Z\alpha/r$ e $\alpha = 1/137$ é a constante de estrutura fina. Para começar devemos notar que $[H, \mathbf{J}] = 0$ onde $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{L} + \boldsymbol{\sigma}/2$. Então há autoestados simultâneos de H , J^2 e J_z . Aqui, $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ e $\psi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}$.

Os spinores bidimensionais φ e χ são autoestados de L^2 , S^2 , J^2 e J_z ,

$$\Rightarrow \varphi_{jm}^{(+)} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{l+1/2+m}{2l+1}} & Y_l^{m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{l+1/2-m}{2l+1}} & Y_l^{m+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad \text{para } j = l + \frac{1}{2}$$

e

$$\varphi_{jm}^{(-)} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{l+1/2-m}{2l+1}} & Y_l^{m-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{l+1/2+m}{2l+1}} & Y_l^{m+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad \text{para } j = l - \frac{1}{2}$$

que também são soluções de $J^2 \varphi_{jm}^{(\pm)} = j(j+1) \varphi_{jm}^{(\pm)}$ e, portanto,

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} \varphi_{jm}^{(\pm)} = \left(J^2 - L^2 - \frac{3}{4} \right) \varphi_{jm}^{(\pm)} = -(1 + \kappa) \varphi_{jm}^{(\pm)}$$

onde

$$\kappa = \begin{cases} -(l+1) = -(j + \frac{1}{2}) & \text{se } j = l + \frac{1}{2} \\ l = j + \frac{1}{2} & \text{se } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Para um dado valor de j , $\varphi_{jm}^{(+)}$ e $\varphi_{jm}^{(-)}$ têm diferentes paridades porque seus valores de l diferem de 1. Mais ainda, estes estados se relacionam um com o outro através de

$$\varphi_{jm}^{(\pm)} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r} \varphi_{jm}^{(\mp)}. \quad (\text{VIII.2.60})$$

Note que o operador $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}/r$ é um pseudo escalar sob TLs, o que está perfeitamente de acordo com o fato dos spinores terem diferentes paridades.

Como $V(r)$ é invariante por reflexão espacial, os autoestados do nosso problema devem também ser autoestados do operador paridade, ou seja

$$\psi'(x') = \beta \psi(x) = \pm \psi(-x).$$

Desta forma podemos rotulá-los com os número quânticos (j, m) e l e as soluções são pares ou ímpares, dependendo do valor de l . Assim obtemos

$$\psi_{jm}^l = \begin{bmatrix} i \frac{G_{lj}}{r} \varphi_{jm}^l \\ \frac{F_{lj}}{r} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r} \varphi_{jm}^l \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.2.61})$$

onde o complexo i foi introduzido por mera conveniência (equações radiais reais) e

$$G_{lj} = \begin{cases} G_j^{(+)} & \text{se } j = l + \frac{1}{2} \\ G_j^{(-)} & \text{se } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F_{lj} = \begin{cases} F_j^{(+)} & \text{se } j = l + \frac{1}{2} \\ F_j^{(-)} & \text{se } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\varphi_{jm}^l = \begin{cases} \varphi_{jm}^{(+)} & \text{se } j = l + \frac{1}{2} \\ \varphi_{jm}^{(-)} & \text{se } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

e

$$P \psi_{jm}^l = (-1)^l \psi_{jm}^l.$$

Substituindo (VIII.2.61) na equação de Dirac do átomo de hidrogênio e usando que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \frac{f(r)}{r} \varphi_{jm}^l &= \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \frac{f(r)}{r} \varphi_{jm}^l \\ &= \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \left(-ir \frac{\partial}{\partial r} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} \right) \frac{f(r)}{r} \varphi_{jm}^l \\ &= \left[-i \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r} \right) - i(1 + \kappa) \frac{f(r)}{r^2} \right] \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) \varphi_{jm}^l \end{aligned}$$

obtemos as seguintes equações radiais:

$$\begin{aligned} \left(E - m + \frac{Z\alpha}{r}\right) G_{lj}(r) &= -\frac{dF_{lj}(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r} F_{lj}(r) \\ \left(E + m + \frac{Z\alpha}{r}\right) F_{lj}(r) &= \frac{dG_{lj}(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r} G_{lj}(r) \end{aligned}$$

que podem ser resolvidas por séries de potências (ver Merzbacher, por exemplo) e o espectro de energia resultante é dado por

$$\Rightarrow E_{nj} = m \left\{ 1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - (j + \frac{1}{2}) + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - Z^2\alpha^2}} \right)^2 \right\}^{-1/2}$$

$n = 1, \dots, 0 \leq l \leq n - 1$.

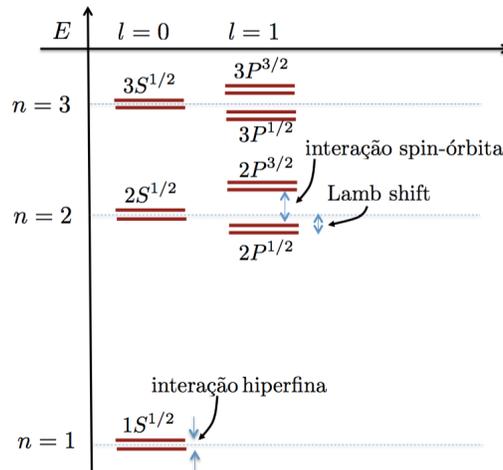
Expandindo em $(Z\alpha)^2$

$$E_{nj} \approx m \left\{ 1 - \frac{(Z\alpha)^2}{2n^2} \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n} \left(\frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right] + O((Z\alpha)^6) \right\}.$$

Os níveis de mais baixa energia podem ser aproximados diretamente da expressão exata para E_{nj} como

n	l	j	E_{nj}
$1S_{1/2}$	1	0	$m\sqrt{1 - (Z\alpha)^2}$
$2S_{1/2}$	2	0	$m\sqrt{\left(1 + \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}\right)}/2$
$2P_{1/2}$	2	1	$m\sqrt{\left(1 + \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}\right)}/2$
$2P_{3/2}$	2	1	$\frac{m}{2}\sqrt{4 - (Z\alpha)^2}$

que revela a chamada *estrutura fina* do átomo de hidrogênio que é devida ao acoplamento spin-órbita, uma correção que obtivemos naturalmente na expansão de Foldy-Wouthuysen. Entretanto, o espectro atômico real (ver figura abaixo) apresenta quebras de degenerescência adicionais que não podem ser explicadas pela expressão que deduzimos para os níveis de energia. Estes efeitos necessitam de novos ingredientes para a sua compreensão. Em seguida trataremos dois deles; a *interação hiperfina* e o *Lamb shift*.



A interação hiperfina é da forma $\mathbf{S} \cdot \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é o spin nuclear, e resulta do acoplamento do spin eletrônico com o campo magnético gerado pelo spin nuclear. Esta interação é escrita como

$$H' = \frac{|e|\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{g_p e}{2M_p} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \nabla \times (\mathbf{I} \times \nabla) \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &\simeq \frac{2}{3} g_p \frac{e}{2M_p} \mathbf{I} \rho(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

é o campo magnético produzido pelo próton e $\rho(\mathbf{r})$ a sua densidade de momento magnético. A variação de energia prevista pela teoria não relativística é

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= \langle \psi_n | H' | \psi_n \rangle \\ &= \frac{2}{3} \frac{g_p e^2}{4mM_p} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I} \int d^3 r \psi_n^*(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \psi_n(\bar{\mathbf{r}}) \\ &\approx \frac{1}{6} \frac{g_p e^2}{mM_p} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I} |\psi_n(0)|^2 \\ &= \frac{1}{2} m \alpha^2 \left[\frac{4}{3} g_p \frac{Z^3 \alpha^2}{n^3} \left(\frac{m}{M_p} \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I} \right] \end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I} = 1/2$ para estados tripleto e $-3/2$ para singletos e, consequentemente temos a variação de energia

$$\delta_n = \frac{1}{2} m \alpha^2 \left[\frac{8}{3} g_p \frac{Z^3 \alpha^2}{n^3} \left(\frac{m}{M_p} \right) \right]$$

para o n -ésimo estado S do espectro atômico. Convém notar que ΔE_n é $\mathcal{O}(m/M_p)$ se comparada à estrutura fina do átomo.

A última correção que nos resta analisar é o chamado Lamb Shift. Este termo é devido à interação do elétron com as flutuações do vácuo do campo EM quantizado. Como o elétron sofre diretamente a atuação do campo elétrico e este pode ser decomposto em modos normais, ou seja, em osciladores quantizados na teoria quântica do campo EM, há uma correção à sua energia devido ao movimento de ponto zero de cada oscilador correspondente ao campo EM. O significado deste movimento de ponto zero é que o campo, apesar de ter valor médio nulo, possui variância finita. Como veremos adiante, esta flutuação faz com que a posição do elétron também apresente flutuações, assim como vimos na interpretação do termo de Darwin em (VIII.2.59). Portanto, a correção à energia eletrônica deve novamente ser descrita por um termo idêntico ao de Darwin, porém com a flutuação $\langle (\delta r)^2 \rangle$ devida ao campo EM ao invés da imprecisão da medida de posição oriunda de λ_c .

A correção à energia do n -ésimo nível é, em primeira ordem em teoria de perturbações, dada por

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= \frac{1}{6} \langle (\delta r)^2 \rangle \int \psi_n^* \nabla^2 V \psi_n d^3 r \\ &= \frac{2\pi}{3} Z \alpha \langle (\delta r)^2 \rangle |\psi_n(0)|^2 \end{aligned}$$

Mas, como $\delta \mathbf{r} = e\mathbf{E}/m$, onde \mathbf{E} é um campo flutuante, temos que a transformada de Fourier de \mathbf{r} satisfaz a equação

$$\delta \mathbf{r}_\omega = -e\mathbf{E}_\omega/m\omega^2 \Rightarrow \delta r_\omega = -eE_\omega/m\omega^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle (\delta r)_\omega^2 \rangle &= \frac{e^2 \langle E_\omega^2 \rangle}{m^2 \omega^4} \\ \Rightarrow \langle (\delta r)^2 \rangle &= \frac{e^2}{m^2} \int \frac{d\omega}{\omega^4} \langle E_\omega^2 \rangle \end{aligned}$$

Mas, como vimos antes, o campo eletromagnético pode ser quantizado, o que nos permite escrever

$$\frac{1}{2} \int d^3r (E^2 + B^2) = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_k \frac{\omega_k}{2}$$

Como na aproximação do contínuo de modos

$$\sum_k \rightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3k \quad \text{e} \quad \omega_k = |\mathbf{k}| = k$$

teremos

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle &= \frac{1}{L^3} \int E^2 d^3r \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\omega_k}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int \omega^3 d\omega \\ &= \int d\omega \langle E_\omega^2 \rangle \end{aligned}$$

ou seja

$$\langle (\delta r)^2 \rangle = \frac{e^2}{2\pi^2 m^2} \int \frac{d\omega}{\omega}$$

A questão é como escolher os limites de integração da expressão $\langle (\delta r)^2 \rangle$, já que a integral é logaritmicamente divergente.

Assim, ao invés de integrarmos $\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega}$ devemos escolher uma frequência ω_{\min} e outra ω_{\max} para efetuar a integração.

Como o comprimento mínimo para se determinar a posição do elétron deve ser o seu comprimento de onda Compton devemos ter

$$\lambda_{\min}^{-1} = \omega_{\max} \sim m \quad (\lambda_{\min} = \lambda_c)$$

Por outro lado a incerteza máxima $\langle (\delta r)^2 \rangle$ deve estar ligada com o tamanho do átomo, ou seja, com o raio de Bohr e, portanto,

$$\lambda_{\max}^{-1} = \omega_{\min} \sim mZ\alpha \quad (\omega_{\min} = \omega_{\text{Bohr}}).$$

Então podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle (\delta r)^2 \rangle &= \frac{e^2}{2\pi^2 m^2} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{d\omega}{\omega} \\ &= \frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{1}{Z\alpha} \frac{1}{m^2} \\ \Rightarrow \Delta E_n &= \frac{4Z\alpha^2}{3} \left(\frac{1}{m}\right)^2 \ln \left(\frac{1}{Z\alpha}\right) |\psi_n(0)|^2 \\ &= \frac{8}{3\pi} \frac{Z^4 \alpha^3}{n^3} \ln \left(\frac{1}{Z\alpha}\right) \frac{m\alpha^2}{2} \delta_{l0} \end{aligned}$$

que para $n = 2$, $Z = 1$ e $l = 0$ é da ordem de 1000 Mc (megaciclos)/s. Assim, vemos que o nível $2S_{1/2}$ tem a sua energia ligeiramente alterada devido a flutuações do campo eletromagnético (vácuo do campo E.M.) na escala δr acima examinada. Esta alteração, não sendo compartilhada pelos níveis $l \neq 0$, causa a quebra da degenerescência dos níveis $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$. Comparando a variação da energia do Lamb shift a do termo de Darwin em (VIII.2.59) vemos que a anterior é da ordem de $(8\alpha/3\pi) \ln(1/Z\alpha)$ menor que o termo de estrutura fina do átomo.