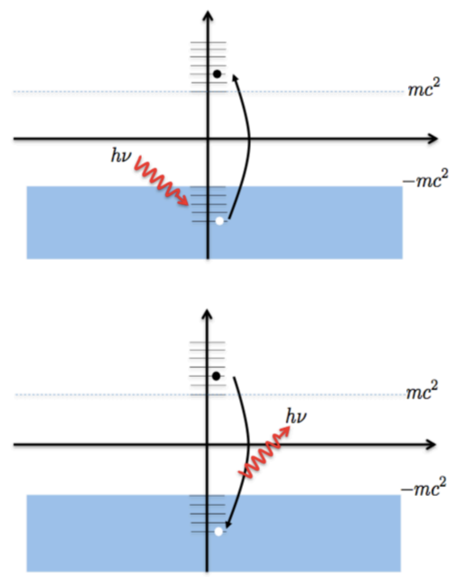
VIII.3) Campos relativísticos

a) Interpretação da equação de Dirac

A saída encontrada por Dirac para resolver os problemas gerados pelas soluções de $E < 0$ da sua equação foi a de supor que todos os estados de $E < 0$ estão ocupados por elétrons segundo o princípio da exclusão de Pauli.

Assim, Dirac passou de uma teoria de uma partícula quântica relativística para uma teoria relativística de muitas partículas. O vácuo de teoria de Dirac é então o chamado *mar de Dirac* onde todos os estados de energia negativa estão ocupados e este é o estado de referência de $E = 0$. Um elétron pode ser criado pela absorção de 1 fóton, deixando um buraco (ausência de um elétron com $E < 0$) no espectro de energias negativas. Da mesma forma, este elétron poderia voltar a ocupar o estado inicial após emitir um fóton, Pictoricamente teríamos:



A ausência de um elétron de $E < 0$ e carga e corresponde à presença de uma partícula de $E > 0$ e carga -e, ou seja, um *pósitron*. Esta é a anti-partícula de elétron.

Desta forma, a interpretação proposta por Dirac nos leva a encarar a sua equação como a equação de um campo spinoral relativístico ao invés de uma equação para a função de onda de uma partícula. A relação entre o campo spinoral de Dirac e a função de onda de partícula considerada é, como em qualquer teoria de muitos corpos, obtida através de

$$\psi^* (x) = \langle 1| \hat{\psi}^+ (x) |0\rangle$$

ou

$$\psi (x) = \langle 0| \hat{\psi} (x) |1\rangle \quad \text{(VIII.3.1)}$$

onde o estado $|1\rangle$ representa o estado de 1 elétron (se $E > 0$) ou de 1 pósitron (se $E < 0$). Retornaremos a este ponto quando fizermos a expansão de ondas planas de Campo de Dirac mas, antes porém, vamos analisar as simetrias existentes entre as funções de onda dos estados com $E > 0$ com as de $E < 0$.

i) Conjugação de carga

Devemos ter uma correspondência entre as soluções de

$$\left(i\hbar \partial\!\!\!/ - \frac{e A\!\!\!/}{c} - mc \right) \psi = 0 \quad \text{(VIII.3.2)}$$

com $E<0$ e as funções de onda dos pósitrons que são soluções de $E>0$ de

$$\left(i\hbar\partial\!\!\!/ + \frac{eA\!\!\!/}{c} - mc\right)\psi_c = 0 \quad \text{(VIII.3.3)}$$

Tomando o complexo conjugado (c.c.) da (VIII.3.2) temos

$$\left(-i\hbar\partial\!\!\!/^* - \frac{eA\!\!\!/^*}{c} - mc\right)\psi^* = 0$$

ou

$$\begin{aligned}\left[\left(-i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\gamma^{\mu*} - mc\right]\psi^* &= 0\\ \Rightarrow \left[\left(i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right)\gamma^{\mu*} + mc\right]\psi^* &= 0. \quad \text{(VIII.3.4)}\end{aligned}$$

Introduzindo o operador $C\gamma^0$ temos

$$\left[\left(i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right)\left(C\gamma^0\right)\gamma^{\mu*}\left(C\gamma^0\right)^{-1} + mc\right]\left(C\gamma^0\right)\psi^* = 0 \quad \text{(VIII.3.5)}$$

Se $C\gamma^0\gamma^{\mu*}\left(C\gamma^0\right)^{-1} = -\gamma^\mu$ teremos

$$\left[\left(i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right)\gamma^\mu - mc\right]\left(C\gamma^0\right)\psi^* = 0$$

ou

$$\begin{aligned}\left(i\hbar\partial\!\!\!/_\mu + \frac{e}{c}A\!\!\!/ - mc\right)C\gamma^0\psi^* &= 0\\ \Rightarrow C\gamma^0\psi^* &= \psi_c = C\overline{\psi}^T \quad \text{(VIII.3.6)}\end{aligned}$$

Então, dado que as matrizes γ satisfazem a relação $\gamma^0\gamma^{\mu*}\gamma^0 = \gamma^{\mu T}$, devemos encontrar o operador que satisfaça $C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu$. Pode-se mostrar que

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T$$

Exemplo:

Seja

$$\psi = \omega^{(4)}(0) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} e^{imc^2t/\hbar}$$

$$\Rightarrow \psi_c = i\gamma^2\gamma^0\gamma^0\psi^* = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} e^{-imc^2t/\hbar} = \omega^{(1)}(0)$$

Então, a ausência de um elétron com $E<0$ e spin $\downarrow$ implica na presença de um pósitron com $E>0$ e spin $\uparrow$.

Em geral se

$$\psi = \Lambda_\pm(p)\,\Sigma(s)\,\psi,$$

ou seja, ψ é autoestado de spin e momento, temos

$$\begin{aligned}
\psi_c &= C\gamma^0\psi^* \\
&= C\gamma^0\left(\frac{\epsilon\not{p}+mc}{2mc}\right)^*\left(\frac{1+\gamma_5\not{s}}{2}\right)^*\psi^* \;=\; C\left(\frac{\epsilon\not{p}^T+mc}{2mc}\right)\left(\frac{1-\gamma_5\not{s}^T}{2}\right)\gamma^0\psi^* \\
&= \frac{-\epsilon\not{p}+mc}{2mc}\left(\frac{1+\gamma_5\not{s}}{2}\right)\psi_c \quad \text{(VIII.3.7)}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ c.c + $C\gamma^0$ leva uma solução de $E<0$, momentum p_μ e polarização s_μ em outra de $E>0$ e mesmos p_μ e s_μ.

Podemos ainda concluir que c.c $+C\gamma^0$ + $(A_\mu \to -A_\mu)$ é uma operação de simetria da equação de Dirac. A esta operação dá-se o nome de *conjugação de carga* ($\mathcal{C}$).

ii) Reflexão espacial

Aqui temos $\mathbf{x}'=-\mathbf{x}$ e $t'=t \Rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu = g^{\mu\nu}$.

Como $S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ devemos ter $P^{-1}\gamma^\mu P = g^{\mu\nu}\gamma^\nu$ que é obedecida por $P=e^{i\varphi}\gamma^0$.

$$\Rightarrow \psi'(x') = P\psi(x) = e^{i\varphi}\gamma^0\psi(x^0,-\mathbf{x})$$

Para uma partícula em repouso

$$\begin{aligned}
\gamma_0\psi_{1,2} &= \psi_{1,2} \\
\gamma_0\psi_{3,4} &= -\psi_{3,4}
\end{aligned}$$

A transformação para funções escalares e vetoriais é da forma

$$\begin{aligned}
P\phi(\mathbf{x},t) &= \phi'(\mathbf{x}',t) = \phi(-\mathbf{x},t) \\
P\mathbf{A}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{A}'(\mathbf{x}',t) = -\mathbf{A}(-\mathbf{x},t)
\end{aligned}$$

Esta transformação deixa a equação de Dirac invariante.

iii) Inversão temporal

Agora, $\mathbf{x}'=\mathbf{x}$ e $t'=-t$.

Tomemos o c.c. da equação de Dirac. Temos então

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^*(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \left\{c\boldsymbol{\alpha}^*\cdot\left(i\hbar\boldsymbol{\nabla}-\frac{e\mathbf{A}}{c}\right)+\beta^*mc^2+e\phi\right\}\psi^*(\mathbf{x},t). \quad \text{(VIII.3.8)}$$

Seja T o operador tal que $T\psi^*(t)=\psi'(t')$. Aplicando-o dos dois lados da (VIII.5.8) teremos

$$i\hbar\frac{\partial\psi'(\mathbf{x},t')}{\partial t'} = \left\{-c\left(T\boldsymbol{\alpha}^*T^{-1}\right)\cdot\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}-\frac{e\mathbf{A}(\mathbf{x},t')}{c}\right)+\left(T\beta^*T^{-1}\right)mc^2+e\phi(\mathbf{x},t')\right\}\psi'(\mathbf{x},t'), \quad \text{(VIII.3.9)}$$

onde usamos que $\mathbf{A}'(\mathbf{x},t')=-\mathbf{A}(\mathbf{x},-t)$ e $\phi'(\mathbf{x},t')=\phi(\mathbf{x},-t)$,

$$\Rightarrow \begin{cases} T\boldsymbol{\alpha}^*T^{-1} = -\boldsymbol{\alpha} \\ T\beta^*T^{-1} = \beta \end{cases}$$

deixam a ED invariante.

Pode-se mostrar que estas relações são satisfeitas se $T = +i\gamma^1\gamma^3 = -i\alpha^1\alpha^3$. A operação c.c.+$T$ é a já conhecida inversão temporal $\mathcal{T}$. Em geral têm-se para spinores autoestados de momento e spin,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\left(\frac{\epsilon\not{p}+mc}{2mc}\right)\left(\frac{1+\gamma_5\not{s}}{2}\right)\psi\left(\mathbf{x},t\right) &= T\left(\frac{\epsilon\not{p}^*+mc}{2mc}\right)T^{-1}T\left(\frac{1+\gamma_5\not{s}^*}{2}\right)T^{-1}\psi'\left(\mathbf{x},t'\right)\\ &= \left(\frac{\epsilon\not{p}'+mc}{2mc}\right)\left(\frac{1+\gamma_5\not{s}'}{2}\right)\psi'\left(\mathbf{x},t'\right)\end{aligned}$$

onde $p' = (p_0, -\mathbf{p})$ e $s' = (s_0, -\mathbf{s})$ como esperamos classicamente para a operação de inversão temporal.

Como P e $\mathcal{T}$ são operações de simetria quando $A_\mu = 0$, podemos usá-las na construção da função de onda do pósitron através de

$$\begin{aligned}\psi_{PCT}\left(x'\right) &= PC\gamma_0\left(\mathcal{T}\psi\left(x\right)\right)^* = P\mathcal{C}\mathcal{T}\psi(x)\\ &= ie^{i\varphi}\gamma_5\psi\left(x\right)\ \text{onde}\ x' = -x.\end{aligned}$$

Se

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left(\frac{\epsilon\not{p}+mc}{2mc}\right)\left(\frac{1+\gamma_s\not{s}}{2}\right)\psi\left(x\right)\\ \Rightarrow\psi_{PCT}\left(x'\right) &= ie^{i\varphi}\gamma_5\left(\frac{\epsilon\not{p}+mc}{2mc}\right)\left(\frac{1+\gamma_s\not{s}}{2}\right)\psi\left(x\right)\\ &= \left(\frac{-\epsilon\not{p}+mc}{2mc}\right)\left(\frac{1-\gamma_s\not{s}}{2}\right)\psi_{PCT}\left(x'\right).\end{aligned}$$

Esta equação difere da (VIII.3.7) apenas no sinal do spin, o que é de se esperar haja vista a presença da inversão temporal na construção de ψ_c. Então, podemos descrever a função de onda do pósitron com energia positiva como a de um elétron de energia negativa multiplicada por $ie^{i\varphi}\gamma_5$ se movendo para trás no espaço-tempo.

Na presença do campo eletromagnético, devemos usar esta mesma transformação no estado que é solução da ED para $E < 0$,

$$\left\{c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}-\frac{e\mathbf{A}}{c}\right)+\beta mc^2+e\phi\right\}\psi\left(x\right) = -E\psi(x).$$

Usando que $A'_\mu(x') = A_\mu(x)$ quando $x'_\mu = -x_\mu$, teremos

$$\left\{c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}'+\frac{e\mathbf{A}'(x')}{c}\right)+\beta mc^2-e\phi'(x')\right\}\psi_{PCT}\left(x'\right) = E\psi_{PCT}\left(x'\right),$$

corroborando mais uma vez a interpretação dada no caso da partícula livre.

b) O campo de Dirac

Para a equação de Dirac podemos proceder em analogia com o que fizemos com o campo de Schrödinger.

Se a equação de Dirac é uma equação de campo, ela pode ser obtida de

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\psi, H]$$

onde

$$H = \int d^3x\ \psi^\dagger\left(-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta mc^2\right)\psi. \quad \text{(VIII.3.10)}$$

Outros operadores úteis definidos de forma análoga aos dos sistemas não relativísticos de muitos corpos são:

$$\mathbf{P} = \int \psi^\dagger \left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}\right)\psi \; d^3x, \quad \left(P^\mu = \left(E/c, \mathbf{p}\right)\right)$$

e

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = i\hbar\bar{\psi}\gamma^\mu \left(x^\nu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - x^\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda_\nu} + \Sigma^{\nu\lambda}\right)\psi \quad \text{(VIII.3.11)}$$

onde $\Sigma^{\nu\lambda} = \frac{1}{4}\left[\gamma^\nu, \gamma^\lambda\right]$.

O operador momento angular total pode ser obtido como a componente $\mathcal{M}^{0\nu\lambda}$ integrada em d^3x, ou seja,

$$M^{\nu\lambda} = \int d^3x \, \mathcal{M}^{0\nu\lambda} \quad \text{(VIII.3.12)}$$

que é uma constante de movimento,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \left(M^{23}, M^{31}, M^{12}\right) \\ &= \int d^3x \, \psi^\dagger \left(\mathbf{r} \times (-i\hbar)\boldsymbol{\nabla} + \frac{\hbar\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\psi \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}. \quad \text{(VIII.3.13)}$$

A conservação da corrente nos diz que $\partial_\mu j^\mu = 0$ ou

$$Q = \int d^3x \; \psi^\dagger\psi = \text{constante} \quad \text{(VIII.3.14)}$$

Aqui também podemos expandir $\psi\left(\mathbf{x}, t\right)$ em ondas planas como

$$\psi\left(\mathbf{x}, t\right) = \sum_{s=\pm}\int \frac{d^3p}{\left(2\pi\hbar\right)^{3/2}}\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}\left[b\left(p,s\right)u\left(p,s\right)e^{-ip\cdot x/\hbar} + d^\dagger\left(p,s\right)v\left(p,s\right)e^{ip\cdot x/\hbar}\right],$$

onde $E_p = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, $p\cdot x \equiv p^\mu x_\mu$ e, agora, ao invés de amplitudes, $b\left(p,s\right)$ e $d\left(p,s\right)$ são operadores, assim como o campo $\psi\left(\mathbf{x}, t\right)$. Como a equação de Dirac nos levou naturalmente à descrição de férmions (elétrons e pósitrons), estes operadores devem obedecer às relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{b(p,s), b^\dagger(p',s')\} &= \delta_{ss'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \\ \{d(p,s), d^\dagger(p',s')\} &= \delta_{ss'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \end{aligned}$$

e todos os demais anticomutadores nulos. Usando este resultado é fácil mostrar que

$$\begin{aligned} \left\{\psi_\alpha\left(\mathbf{x}, t\right), \psi_\beta^\dagger\left(\mathbf{x}', t\right)\right\} &= \delta_{\alpha\beta}\delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) \quad \text{e} \\ \left\{\psi, \psi\right\} &= \left\{\psi^\dagger, \psi^\dagger\right\} = 0 \end{aligned}$$

Com estas expressões temos

$$P^\mu = \sum_{\pm s} d^3p \, p^\mu \left[b^\dagger\left(p,s\right)b\left(p,s\right) - \underbrace{d\left(p,s\right)d^\dagger\left(p,s\right)}_{-d^\dagger(p,s)d(p,s)+\{d,d^\dagger\}}\right].$$

Como o termo $\{\ ,\ \}$ aplicado a $|0\rangle = |0\rangle_{\text{Dirac}}$ resulta em uma constante infinita, podemos redefini-la como zero, ou seja, este é o vácuo desta teoria. Assim,

$$\begin{aligned} N^{(+)}\left(p,s\right) &= b^+\left(p,s\right)b\left(p,s\right) \quad \text{e} \\ N^{(-)}\left(p,s\right) &= d^+\left(p,s\right)d\left(p,s\right) \end{aligned}$$

são, respectivamente, o número de elétrons e pósitrons presentes. Portanto, $P^\mu|0\rangle = 0$.

A conservação da corrente pode ser escrita em termos de operadores de número como

$$Q = \sum_{\pm s}\int d^3p\left[N^{(+)}\left(p,s\right) - N^{(-)}\left(p,s\right)\right] = \text{constante}$$

ou seja, a carga total do sistema se conserva.

b) O campo escalar - Klein-Gordon

Inspirados na interpretação de Dirac para a sua equação podemos também interpretar a equação de KG como uma equação de campo. Assim, podemos usar todos os resultados da quantização do campo escalar que vimos na seção (VIII.3) com a única diferença que agora $\hbar\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{c^2\hbar^2k^2 + m^2c^4}$ e

$$-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t} - \hbar^2\nabla^2\varphi + m^2c^4\varphi = 0$$

ou

$$\Box\varphi + \frac{1}{\lambda_c^2}\varphi = 0$$

Os campos podem ser expandidos como

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(k)}}\left[a(\mathbf{k})\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} + a^\dagger(\mathbf{k})\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}\right], \quad \text{(VIII.3.15)}$$

onde

$$\left[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')\right] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

e

$$[a, a] = \left[a^\dagger, a^\dagger\right] = 0.$$

Os operadores hamiltoniano e de momento linear total podem ser escritos como

$$H = \int d^3k\ \hbar\omega(\mathbf{k})\ \ a^\dagger(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k}) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{P} = \int d^3k\, \hbar\mathbf{k}\ a^\dagger(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k}). \quad \text{(VIII.3.16)}$$

Note que em (VIII.3.15) o campo $\varphi(\mathbf{x}, t)$ é expandido em componentes de energias positivas e negativas. Aqui também estas componentes representam os estados correspondentes a anti-partículas.

Como o campo $\varphi(\mathbf{x}, t)$ é escalar, não há graus de liberdade que possamos associar ao spin da partícula e, portanto, este campo descreve a dinâmica de partículas com spin $S = 0$.

Podemos ainda construir campos com graus de liberdade internos $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ (como o campo EM) que estariam ligados com o momento angular interno (de spin) da partícula, o que nos levaria à descrição de bósons com spin.

Um outro caso importante de campos escalares é o de campos escalares complexos. Neste caso temos,

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_1(\mathbf{x}, t) + i\varphi_2(\mathbf{x}, t)\right] \quad \text{(VIII.3.17)}$$

com φ_1 e $\varphi_2 \in \mathbb{R}$, e $\left(\Box + {}^1\!/\lambda_c^2\right)\varphi_1 = \left(\Box + {}^1\!/\lambda_c^2\right)\varphi_2 = 0$.

É facil mostrar que existem operadores

$$\begin{aligned}
a_{(+)}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_1(\mathbf{k}) + ia_2(\mathbf{k})\right] \\
a^\dagger_{(+)}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a^\dagger_1(\mathbf{k}) - ia^\dagger_2(\mathbf{k})\right] \\
a_{(-)}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_1(\mathbf{k}) - ia_2(\mathbf{k})\right] \\
a^\dagger_{(-)}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a^\dagger_1(\mathbf{k}) + ia^\dagger_2(\mathbf{k})\right], \quad \text{(VIII.3.18)}
\end{aligned}$$

onde $N^{(+)}(\mathbf{k}) = a^\dagger_{(+)}(\mathbf{k})\, a_{(+)}(\mathbf{k})$ e $N^{(-)}(\mathbf{k}) = a^\dagger_{(-)}(\mathbf{k})\, a_{(-)}(\mathbf{k})$ e

$$P_\mu = \sum_k \hbar k_\mu\ \left(N^{(+)}_{\mathbf{k}} + N^{(-)}_{\mathbf{k}}\right).$$

A conservação de corrente $\partial_\mu j^\mu = 0$ implica, como vimos antes, em

$$Q = \frac{i\hbar}{2mc^2} \int d^3x \, (\varphi^* \dot{\varphi} - \varphi \dot{\varphi}^*) = \text{constante}$$

Mas, em termos de operadores de número, podemos escrever

$$Q = \sum_{\mathbf{k}} \left(N_{\mathbf{k}}^{(+)} - N_{\mathbf{k}}^{(-)} \right) \qquad \text{(VIII.3.19)}$$

Portanto, o campo escalar complexo pode ser interpretado como um campo carregado onde as partículas possuem carga $(+1)$ e as anti-partículas carga (-1).

d) Conclusões

Vimos, portanto, que as equações de onda relativísticas devem ser encaradas como equações de campos e que os quanta dos respectivos campos são partículas (associadas às energias positivas) que gozam de diferentes características dependendo do campo em questão.

Temos, por exemplo, como extensões do que vimos nesta seção o seguinte:

i) Campo escalar massivo (KG) $\Rightarrow$ bósons massivos, neutros e de spin $= 0$.

ii) Campo vetorial massivo (Proca) $\Rightarrow$ bósons massivos, neutros e de spin $\neq 0$ (inteiro).

iii) Campo vetorial não massivo (EM) $\Rightarrow$ fótons; bósons não massivos de spin $\neq 0$.

iv) Campo escalar complexo $\Rightarrow$ bósons massivos, carregados e de spin $= 0$.

v) Campo Spinoral (Dirac) massivo $\Rightarrow$ férmions massivos carregados.

vi) Campo Spinoral não massivo $\Rightarrow$ férmions não massivos (modelo original de neutrinos).

A nossa intenção nesta seção foi apenas estabelecer a formulação de onde se deve iniciar um estudo mais sistemático das interações fundamentais presentes na natureza, o que é o objetivo da Teoria Quântica de Campos.