Mecânica Quântica I

1a LISTA

I/2023

1) Seja H um operador hermitiano positivo definido ($\langle u|H|u\rangle > 0$). Mostre que para quaisquer $|u\rangle$ e $|v\rangle$

$$|\langle u|H|v\rangle|^2 \leq \langle u|H|u\rangle\langle v|H|v\rangle$$

e que a igualdade $\langle u|H|u\rangle = 0$ implica, necessariamente, em $H|u\rangle = 0$. Mostre ainda que $\mathrm{tr}H \geq 0$ e que a igualdade implica em $H = 0$.

2) Considere o espaço $\mathcal{F}$ das funções de módulo quadrado integrável no intervalo $-\infty < x < \infty$. Dado um operador diferencial geral de 2ª ordem tal que

$$\langle x|L|\psi\rangle = a(x)\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + b(x)\frac{d\psi(x)}{dx} + c(x)\psi(x)$$

onde $a(x),\ b(x)$ e $c(x)$ são funções complexas de $x \in \mathbb{R}$, mostre que o seu conjugado satisfaz

$$\langle x|L^+|\psi\rangle = \frac{d^2[a^*(x)\psi(x)]}{dx^2} - \frac{d[b^*(x)\psi(x)]}{dx} + c^*(x)\psi(x)$$

Dica: calcule os elementos de matriz $\langle\varphi|L|\psi\rangle$ e use integração por partes.

3) Considere um operador $\mathbf{O} \equiv \mathbf{D}^2 + \mathbf{V} + \mathbf{K}$, onde os operadores $\mathbf{V},\ \mathbf{D}$ e $\mathbf{K}$ estão definidos abaixo e duas representações $|u\rangle$ e $|v\rangle$ tais que

$$\langle u|u'\rangle = \delta(u - u') \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} du|u\rangle\langle u| = 1$$

e

$$\langle v|v'\rangle = \delta(v-v') \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dv|v\rangle\langle v| = 1.$$

Os operadores componentes de $\mathbf{O}$ são tais que:

i) na representação $|v\rangle$, temos $\mathbf{D}|v\rangle = v|v\rangle$

ii)$\langle u|\mathbf{V}|u'\rangle = [1-3z(u)]\delta(u-u')$ onde $z(u)$ é uma função real.

iii)$\langle u|\mathbf{K}|u'\rangle = \frac{2\alpha}{\pi}\mathcal{P}[\frac{1}{u-u'}\frac{d}{du'}]$ onde $\mathcal{P}$ significa o valor principal da função considerada e α é uma constante.

Finalmente, sabendo-se que $\langle u|v\rangle = \frac{e^{iuv}}{\sqrt{2\pi}}$, pede-se:

a) Mostrar que, na representação $|u\rangle$, o estado $\mathbf{O}|\psi\rangle$ é dado por

$$-\frac{d^2\psi(u)}{du^2} + [1-3z(u)]\psi(u) + \frac{2\alpha}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} du' \frac{\psi'(u')}{u-u'}$$

onde $\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty}$ é o valor principal da integral considerada e $\psi'(u') \equiv \frac{d\psi(u')}{du'}$.

b) Mostrar que, na representação $|v\rangle$, o estado $\mathbf{O}|\psi\rangle$ é dado por

$$(v^2 + 2\alpha|v| + 1)\tilde{\psi}(v) - \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dv'\tilde{z}(v-v')\tilde{\psi}(v')$$

onde

$$\tilde{f}(v) = \langle v|\tilde{f}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} du f(u)e^{-iuv}$$

c) Considerar $z(u) = \frac{4}{3}(1+\frac{u^2}{4\alpha^2})^{-1}$ e mostrar que $\mathbf{O}|\psi\rangle$ do ítem anterior reduz-se a

$$(v^2 + 2\alpha|v| + 1)\tilde{\psi}(v) - 4\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} dv'\tilde{\psi}(v')e^{-2\alpha|v-v'|}$$

d) Resolver o problema de auto valores $\mathbf{O}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ do ítem anterior quando $\alpha = 0$. Escreva ainda os auto estados na representação $|u\rangle$.

e) Mostrar que, em função de $\nu \equiv 2\alpha v$, o problema de auto valores acima reduz-se a

$$(\frac{\nu^2}{4\alpha^2} + |\nu| + 1)\phi(\nu) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu' \phi(\nu') e^{-|\nu-\nu'|} = \lambda\phi(\nu)$$

onde $\phi(\nu) \equiv \tilde{\psi}(\frac{\nu}{2\alpha})$. Mostre ainda que no limite $\alpha \to \infty$ a função $\phi_0(\nu) = \nu e^{-|\nu|}$ é um auto estado de $\mathbf{O}$ com auto valor nulo.