Mecânica Quântica I

3a LISTA

I/2023

1) Considere o movimento de uma partícula de massa m, em 1-D, sujeita ao potencial (poço quadrado)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |\, x \,| > \frac{a}{2} \\ -V_0 & \text{se} \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \end{cases}$$

assumindo que a incidência se dê da esquerda do potencial.

a) Mostre que a amplitude da onda transmitida dividida pela da incidente pode ser escrita como

$$\frac{A_{trans}}{A_{inc}} = \sqrt{T(E)} e^{i\delta(E)} e^{-ika}$$

onde $\delta(E) = \tan^{-1}[\frac{1}{2}(\frac{\kappa}{k} + \frac{k}{\kappa})\tan(\kappa a)]$ e

$$T(E) = \frac{1}{\cos^2(\kappa a) + \frac{1}{4}(\frac{\kappa}{k} + \frac{k}{\kappa})^2 \sin^2(\kappa a)}$$

onde $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ e $\kappa = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$.

b) Mostre que $T(E)$ possui máximos em $\kappa a = n\pi$ e escreva esta condição em termos dos valores discretos E_n para a energia E.

c) Expanda $S(E) \equiv \sqrt{T(E)} e^{i\delta(E)}$ em torno da ressonância $\kappa a \approx n\pi$ ($\kappa a - n\pi \approx \epsilon$) e mostre que nesta vizinhança podemos escrever

$$S_n(E) \approx \frac{1}{\cos(\kappa_n a)} \frac{i\frac{\Gamma_n}{2}}{E - E_n + i\frac{\Gamma_n}{2}}$$

onde

$$\frac{4}{\Gamma_n} = \left[\left(\frac{\kappa}{k} + \frac{k}{\kappa} \right) a \frac{d\kappa}{dE} \right]_{E=E_n}$$

d) Mostre ainda que, nessa mesma vizinhança, temos

$$\delta(E) \approx \tan^{-1} \frac{2}{\Gamma_n}(E - E_n)$$

e) Considere o pacote incidente

$$\psi_{in}(x,t) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} e^{i(kx-\omega(k)t)} f(k) e^{\frac{ika}{2}}$$

(note que $\psi(x,0)$ está centrado em $-\frac{a}{2}$) onde $f(k)$ está centrada em k_n (ressonância) e, usando o princípio da fase estacionária, mostre que

$$\psi_{in}(x,t) \approx e^{i(k_n x-\omega(k_n)t)} e^{\frac{ik_n a}{2}} \psi\left(x + \frac{a}{2} - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_n} t, 0\right)$$

f) Considere o pacote transmitido

$$\psi_{tr}(x,t) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} e^{i(kx-\omega(k)t)} e^{-ika} S(E(k)) f(k) e^{\frac{ika}{2}}$$

Usando o mesmo raciocínio que o usado em (e) mostre que o pacote transmitido está centrado em $x = \frac{a}{2} + \frac{\hbar k_n t}{m} - \hbar \frac{d\delta(E)}{dE} \frac{\hbar k_n}{m}$.

g) Use agora a aproximação feita no ítem (d) para $S(E)$ e, assumindo que a integral para $\psi_{tr}(x,t)$ possa ser aproximada por

$$\psi_{tr}(x,t) \approx f(k_n) \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} e^{i(k(x-\frac{a}{2})-\omega(k)t)} S_n(E(k)),$$

calcule a nova forma de $\psi_{tr}(x,t)$ (decaimento exponencial).

h) Sabendo-se que a largura de $f(k)$ em torno de k_n é Δk_n estabeleça as condições para que se adote as aproximações usadas em (f) ou (g) para $\psi_{tr}(x,t)$. Interprete fisicamente os seus resultados, comparando $\psi_{tr}(x,t)$ dos ítens (f) e (g).

2) Considere um oscilador harmônico forçado descrito pela hamiltoniana

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + f(t)a + f^*(t)a^\dagger.$$

a) Mostre que se considerarmos que o termo forçante só atua no sistema entre os instantes t_1 e t_2 tais que $0 < t_1 < t_2 < t$, e, consequentemente, pudermos identificar $a_{in} = a(0)$ e $a_{out} = a(t)$, o operador de evolução temporal pode ser escrito como

$$U(t,0) = e^{-\frac{iH_{in}t}{\hbar}} S$$

onde $a_{in} = a(0) = a$ e a é o operador de destruição na versão de Schrödinger e, a menos de uma fase, $S = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$ com $\alpha = -ig^*(\omega)/\hbar$. Aqui, $g(\omega)$ é a transformada de Fourier de $f(t)$.

b) Mostre, então, que o estado $|\psi(t)\rangle$, onde $t > t_2$, evolui do estado fundamental $|0\rangle$ como

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{(|\alpha|^2 + i\omega t)}{2}} \exp(\alpha a^\dagger e^{-i\omega t})|0\rangle$$

c) Mostre que o estado obtido em (b) é autoestado de a com autovalor $\alpha e^{-i\omega t}$.

d) Use o resultado anterior para mostrar que , na representação de coordenadas, a equação para $|\psi(t)\rangle$ é

$$\left(q + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial q}\right)\psi(q,t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\alpha e^{-i\omega t}\psi(q,t)$$

onde m é a massa da partícula considerada no potencial harmônico.

e) Resolva a equação acima e mostre que

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

e

$$\langle q\rangle + \frac{i}{m\omega}\langle p\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\alpha e^{-i\omega t}$$

onde q e p são, respectivamente, os operadores de posição e momento linear do sistema. Interprete fisicamente os resultados obtidos neste ítem.