Mecânica Quântica I

4a LISTA

I/2023

1) Considere o movimento de uma partícula de massa m, em 1-D, sujeita ao potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad |\, x \,| > a \\ -C|x| & \text{se} \quad -a < x < a \end{cases}$$

Assumindo que $C > 0$, obtenha, na aproximação WKB, a equação que determina os auto valores de energia se $E < 0$. Estime o valor mínimo de C para que exista pelo menos 1 nível com $E < 0$.

2) Considere um elétron confinado no interior de uma casca cilíndrica ôca cujo eixo coincide com a direção $\hat{\mathbf{z}}$. A função de onda deve, então, anular-se nas paredes interna e externa, $\rho = \rho_a$ e ρ_b, e também em $z = 0$ e $z = L$.

a) Encontre as auto funções de energia deste problema (não é necessário normalizá-las). Mostre que os auto valores de energia são dados por

$$E_{nml} = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left[k_{mn}^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2\right] \qquad (l = 1, 2, ..., m = 1, 2, ...)$$

onde k_{mn} é a n-ésima raiz da equação transcendental

$$J_m(k_{mn}\rho_b)N_m(k_{mn}\rho_a) - N_m(k_{mn}\rho_b)J_m(k_{mn}\rho_a) = 0$$

onde $J_m(\rho)$ e $N_m(\rho)$ são funções de Bessel e Neumann de ordem m.

b) Repita o mesmo problema no caso de existir um campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ se $0 < \rho < \rho_a$. Note que os auto valores de energia são influenciados pela presença do campo magnético mesmo sem que o elétron esteja exposto diretamente a ele.

c) Compare, em particular, o estado fundamental do problema para $B = 0$ e $B \neq 0$. Mostre que ao se exigir que a energia seja independente de B, obtém-se a quantização do fluxo que

é dada por

$$\pi\rho_a^2 B = \frac{2\pi N\hbar c}{e}, \qquad (N = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

3) Considere um oscilador harmônico forçado descrito pela lagrangiana

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2 + f(t)x.$$

Mostre que o propagador quântico deste sistema é dado por

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\ \mathrm{sin}\omega T}} \quad e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}}$$

onde

$$S_{cl} = \frac{m\omega}{2\mathrm{sin}\omega T}\Big[\mathrm{cos}\omega T\ ({x_b}^2 + {x_a}^2) - 2x_a x_b$$
$$+\frac{2x_b}{m\omega}\int_{t_a}^{t_b} f(t)\mathrm{sin}\omega(t - t_a)dt + \frac{2x_a}{m\omega}\int_{t_a}^{t_b} f(t)\mathrm{sin}\omega(t_b - t)\ dt$$
$$-\frac{2}{m^2\omega^2}\int_{t_a}^{t_b}\int_{t_a}^{t} f(t)f(s)\mathrm{sin}\omega(t_b - t)\mathrm{sin}\omega(s - t_a)dsdt\Big],$$

$T = t_b - t_a$, $x_b = x(t_b)$ e $x_a = x(t_a)$.

4) Defina a função de partição de um sistema como

$$Z = \int d^3x' K(\mathrm{x}', t; \mathrm{x}', 0)|_{t=-i\hbar\beta}$$

Mostre que a energia do estado fundamental do sistema pode ser obtida calculando-se

$$\lim_{\beta\to\infty} -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}.$$

Ilustre o seu resultado para o caso de um oscilador harmônico.

5) Uma partícula de carga e move-se num campo magnético constante ao longo de $\hat{\mathbf{z}}$. Usando o gauge onde $A_z = 0$, mostre que

$$q \equiv \frac{cp_x - eA_x}{eB} \qquad \text{e} \qquad p \equiv \frac{cp_y - eA_y}{c}$$

são variáveis canonicamente conjugadas, assim como z e p_z. Derive o espectro de energia e as auto funções na representação q. Discuta a degenerescência ainda existente no problema.