Mecânica Quântica I

5a LISTA

I/2023

1) A massa efetiva de um elétron em um sólido é definida como $\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2\epsilon(k)}{dk^2}$ onde $\epsilon(k)$ é a energia do elétron. Então,

a) Calcule m^* no modelo de Kronig-Penney (funções delta com período a) no fundo e no topo da banda de energia mais baixa. Explique o seu resultado fisicamente.

b) Suponha que a forma de $\epsilon(k)$ seja conhecida e que um campo elétrico E, de baixa intensidade, seja ligado quando o elétron encontra-se no fundo da banda de energia mais baixa. Por baixa intensidade entenda-se $eEa << \Delta\epsilon$ onde $\Delta\epsilon$ é o valor do "gap" de energia entre a banda de energia mais baixa e a primeira banda de excitada. Descreva o estado do sistema em função do tempo.

2) Numa transformação de Galileu, $\mathbf{r} \to \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ e $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - m\mathbf{v}$, onde $\mathbf{v}$ é a velocidade de um sistema de coordenadas com respeito ao outro.

a) Mostre que esta transformação é realizada pelo operador $G(\mathbf{v}, t) = \exp[\frac{i\mathbf{v}.(m\mathbf{r}-\mathbf{p}t)}{\hbar}]$.

b) A lei de movimento é invariante por esta transformação se $G^\dagger(\mathbf{v}, t)U(t, t_0)G(\mathbf{v}, t_0) = U(t, t_0)e^{i\gamma}$. Mostre que esta condição é equivalente à invariância da equação de Schrödinger segundo uma transformação de Galileo, ou seja;

$$G^\dagger(\mathbf{v}, t)(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H)G(\mathbf{v}, t) = (i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H) + f(t)$$

onde $f(t) \in \mathbf{R}$.

3) Classicamente temos

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \qquad \text{onde} \qquad p_r = \frac{1}{r}\,(\mathbf{r}.\mathbf{p})$$

como a hamiltoniana de uma partícula de massa m sujeita a um potencial $V(r)$. Mostre que

na mecânica quântica devemos escrever

$$p_r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\,(\mathbf{r}.\mathbf{p}) + (\mathbf{p}.\mathbf{r})\,\frac{1}{r}\right)$$

e que desta forma podemos gerar a equação de Schrödinger correta com o operador hermitiano

$$p_r = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)$$

enquanto que $-i\hbar\frac{\partial}{\partial r}$ não é hermitiano.

4) Se o estado fundamental de uma partícula num "poço esférico" está fracamente ligado, mostre que a profundidade V_0 e o raio a deste poço estão relacionados com a energia de ligação pela expressão

$$\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} = \frac{\pi^2}{4} + 2\eta + \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)\eta^2$$

onde $\eta = \sqrt{-2mE}\ \frac{a}{\hbar}$. Se um dêuteron é representado por um estado ligado de energia 2.226 MeV de um núcleon, com massa reduzida m, que se move num poço esférico de raio $a = 1.5F$, estime a profundidade desse poço. Qual a relação entre V_0 e a para que o poço não tenha qualquer estado ligado. Mostre que se o poço admite um estado ligado de $l \neq 0$ os seus parâmetros satisfazem a relação $j_{l-1}\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}\ a\right) = 0$.

5) Mostre que, para uma partícula sem spin na sua representação de coordenadas, a operação de inversão temporal pode ser representada por uma conjugação complexa da função de onda. Como é representada a mesma operação na representação dos momentos? Mostre que para uma partícula de spin 1/2, na base usual, α e β, dos auto estados de σ_z, a operação de inversão temporal pode ser representada por $\sigma_y K$, onde K implica na conjugação complexa.

6) Sabe-se que uma partícula num potencial esfericamente simétrico está num auto estado simultâneo de $\mathbf{L}^2$ e L_z com auto valores $l(l+1)\hbar$ e $m\hbar$, respectivamente. Prove que o valor

esperado no estado $|l, m>$ satisfaz

$$< L_x > = < L_y > = 0 \qquad \text{e} \qquad < L_x^2 > = < L_y^2 > = \frac{[l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2]}{2}$$

Interprete o seu resultado semiclassicamente.

7) A hamiltoniana do positronium no seu estado $1S$ num campo magnético B ao longo do eixo $\mathbf{z}$ é, dentro de uma boa aproximação, representada por

$$H = A\mathbf{S}_1 .\ \mathbf{S}_2 + \frac{eB}{mc}\ (S_1^z - S_2^z)$$

se os estados de mais alta energia são desprezados. O elétron é rotulado por 1 e o pósitron por 2. Usando a base onde $(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2$ e $S_1^z + S_2^z$ são diagonais, obtenha os auto valores de energia e auto estados deste sistema classificando-os de acordo com os números quânticos associados às constantes de movimento.