Mecânica Quântica I

6a LISTA

I/2023

1) Considere os ítens abaixo

a) Escreva xy, xz e $x^2 - y^2$ como componentes de um tensor esférico (irredutível) de posto dois.

b) O valor esperado

$$Q \equiv e < \alpha, j, m = j|(3z^2 - r^2)|\alpha, j, m = j >$$

é conhecido como o momento de quadrupolo. Escreva então o elemento de matriz

$$e < \alpha, j, m'|(x^2 - y^2)|\alpha, j, m = j >,$$

onde $m' = j, j-1, ..., -j$, em termos de Q e de coeficientes de Clebsch-Gordan apropriados.

2) Um núcleo de spin 3/2 situado na origem do sistema de coordenadas está sujeito a um campo elétrico não uniforme. A interação quadrupolar básica é dada por

$$H_{int} = \frac{eQ}{2s(s-1)\hbar^2}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 S_x^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 S_y^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0 S_z^2\right]$$

onde ϕ é o potencial eletrostático que satisfaz a equação de Laplace e os eixos são escolhidos de forma que

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}\right)_0 = 0$$

Mostre que a energia de interação pode ser escrita como

$$H_{int} = A(3S_z^2 - S^2) + B(S_{(+)}^2 + S_{(-)}^2)$$

e escreva A e B em função de $(\partial^2\phi/\partial x^2)_0$ etc. Determine os auto estados em termos de $|m >; m = \pm 3/2, \pm 1/2$ e os auto valores correspondentes. Há alguma degenerescência no problema?

3) Devido à interação fraca (correntes neutras) há um potencial entre o elétron e o núcleo atômico que viola paridade e que pode ser escrito como

$$V = \lambda[\delta(\mathbf{r})\mathbf{S}.\mathbf{p} + \mathbf{S}.\mathbf{p}\ \delta(\mathbf{r})]$$

onde $\mathbf{S}$ e $\mathbf{p}$ são os operadores de spin e momento linear do elétron, e assume-se que o núcleo encontra-se na origem do sistema de coordenadas. Como resultado, o estado fundamental de um átomo alcalino, em geral caracterizado por $|n, l, j, m >$, contém pequenas contribuições de outros auto estados o que nos leva a escrever

$$|n, l, j, m > \rightarrow |n, l, j, m > + \sum_{n',l',j',m'} C_{n'l'j'm'}|n', l', j', m' >$$

Usando apenas argumentos de simetria, o que você pode dizer sobre (n', l', j', m') ? Quais dão contribuições não nulas para a soma acima? Suponha que a função de onda radial e os níveis de energia sejam conhecidos. Indique como calcular os $C_{n',l',j',m'}$. Há restrições adicionais nos índices (n', l', j', m')?

4) Suponha que uma partícula sem spin esteja ligada em um potencial tão assimétrico que não há níveis de energia degenerados. Usando a invariância por inversão temporal prove que

$$< \mathbf{L} >= 0$$

em qualquer auto estado de energia. Este fato é conhecido como "quenching" do momento angular. Se a função de onda deste estado não degenerado for expandida como

$$\sum_l \sum_m F_{lm}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

que tipo de restrição deveremos ter na fase de $F_{lm}(r)$?