MS 211 - LISTA DE EXERCICIOS No. 4
RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

verão/2016

1. Calcule a matriz Jacobiana para os sistemas abaixo, avalie-a no ponto dado e verifique se nesse ponto ela é inversível.

$$a)\ \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ e^{x_1 - 1} + {x_2}^3 - 2 = 0 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 4x_1 - {x_1}^3 + x_2 = 0 \\ \frac{-x_1^2}{9} + \frac{4x_2 - {x_2}^2}{4} = -1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} \frac{2x_1^2 - {x_1}^2}{9} + \frac{4x_2 - x_2^2}{4} = 0 \\ 8x_1 - 4x_1^2 + {x_2}^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = (1, 1/3)^T \qquad x^{(0)} = (-1, -2)^T \qquad x^{(0)} = (-1, -1)^T$$

2. Considere os seguintes sistemas não-lineares:

$$a)\ \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ x_1 x_2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x_1 x_2 - 3 = 0 \\ x_1^2 - x_2 - 2 = 0 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x_1^2 + 4x_2^2 - 4 = 0 \\ x_1^2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

i) Localize graficamente as raízes de cada sistema não linear.
ii) Em cada caso obtenha uma das raízes através do método de Newton com $\varepsilon = 10^{-2}$, escolhendo chutes iniciais convenientes.
iii) Considere o sistema não linear (a): os pontos da forma $(\alpha \quad \alpha)^T$, $\alpha \in \mathbb{R}$, poderiam ser usados como valores iniciais convenientes para o método de Newton na resolução deste sistema? Justifique.

3. O método de Newton Modificado para se encontrar zeros da *equação não-linear* $f(x) = 0$ consiste em gerar a sequência $\{x_k\}$ através de: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_0)$ onde x_0 é uma aproximação inicial.
a) com auxílio de um gráfico, escreva a interpretação geométrica deste método;
b) cite algumas situações em que é conveniente usar este método no lugar do método de Newton.

4. No método de Newton Modificado para o *sistema de equações não-lineares* $F(x) = 0$ a sequência $\{x^{(k)}\}$ é gerada através de: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$, onde $s^{(k)}$ é solução do sistema linear:
$J_0 s = -F(x^{(k)})$ sendo $J_0 \equiv J(x^{(0)})$ a matriz Jacobiana de $F(x)$ avaliada em $x^{(0)}$.

a) Resolva os sistemas não-lineares do exercício 2 usando os mesmos chutes iniciais escolhidos para o método de Newton e a mesma precisão. *(Perceba que neste caso a matriz Jacobiana é a mesma em todas as iterações, portanto se utilizarmos a fatoração LU para resolver os sistemas lineares a fatoração será feita apenas uma vez).*
b) Compare os resultados obtidos nos dois métodos, quantidade de cálculos e número de iterações necessárias.

5. O método de Newton pode ser aplicado para a resolução de sistemas lineares: $Ax = b$. Demonstre que neste caso o método de Newton converge em apenas uma iteração. O mesmo ocorre para Newton Modificado?

6. Considere o sistema não-linear: $\begin{cases} \exp(x_1) - 1 = 0 \\ \exp(x_2) - 1 = 0 \end{cases}$

A solução deste sistema é: $x^* = (0\ 0)^T$.
a) Verifique que a matriz Jacobiana é inversível em x^*.
b) Resolva este sistema não linear através do Método de Newton, usando $x^0 = (-10 \quad -10)^T$ (utilize 4 casas decimais). Analise os resultados obtidos e justifique o que acontece.

7. Aplique duas iterações do Método de Newton Modificado nos sistemas não lineares abaixo, escolhendo aproximações iniciais convenientes.

$$a)\ \begin{cases} x_1^2 + x_2 - 37 = 0 \\ x_1 - x_2^2 - 5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13 \\ x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11 \\ x_2^3 - 25x_3 = -22 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1^2 - 8x_2^2 + 10x_3 = 0 \\ \dfrac{x_1^2}{7x_2x_3} - 1 = 0 \end{cases}$$