MS 211 - ATIVIDADES COMPUTACIONAIS

Corpo em Queda Livre

1º sem/2014

---

3. Ajuste de Curvas

Você sabe de seus estudos de física que a força total F aplicada sobre um corpo deve se igualar ao produto de sua massa m e a aceleração a provocada nele por essa força (2ª lei de Newton)[1]:

$$F = ma. \tag{1}$$

Um corpo em queda livre (como uma pessoa em um salto de paraquedas) está sujeito à força gravitacional $F_g = mg$, mas está ainda sujeto a uma força de restência do ar, ou *força de arrasto* F_a, que deve depender da velocidade: $F_a = F_a(v)$.

Um experimento utilizado para se medir a força de arrasto é mostrado na figura 1.

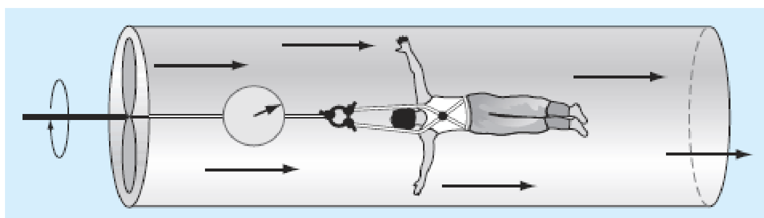

Figura 1: Experimento de túnel de vento para se medir a dependência da resistência do ar com relação à velocidade.

Um corpo (uma pessoa ou um objeto qualquer) é suspenso em um túnel de vento e a força é medida para vários níveis de velocidade do vento. O resultado de um desses experimentos é apresentado na tabela abaixo:

v (m/s)	10	20	30	40	50	60	70	80
F_a (N)	25	70	380	550	610	1220	830	1450

Tabela 1: Dados experimentais para a força (N) e velocidade (m/s) de um experimento de túnel de vento.

A relação $F(v)$ pode ser vista na figura 2, o diagrama de dispersão $F_a \times v$.

Em primeiro lugar, os pontos indicam que a força aumenta conforme a velocidade aumenta. Como primeira aproximação poderíamos assumir uma relação *linear* do tipo

$$F_a = a + bv. \tag{2}$$

(a) Aplique o método dos quadrados mínimos para obter os parâmetros a e b que melhor ajustam a função (2) aos dados da tabela 1.

---

[1] Considere em todos os exercícios uma situação *unidimensional*, onde as quantidades físicas vetoriais estão todas na mesma direção $\hat{\imath}$, e são denotadas pelo seu módulo (e.g. $\vec{F} = F\hat{\imath}$, $\vec{v} = v\hat{\imath}$). O sentido escolhido aqui para o estudo de um corpo em queda livre é $\hat{\imath} \equiv -\hat{z}$, ou seja, sentido vertical, para baixo.

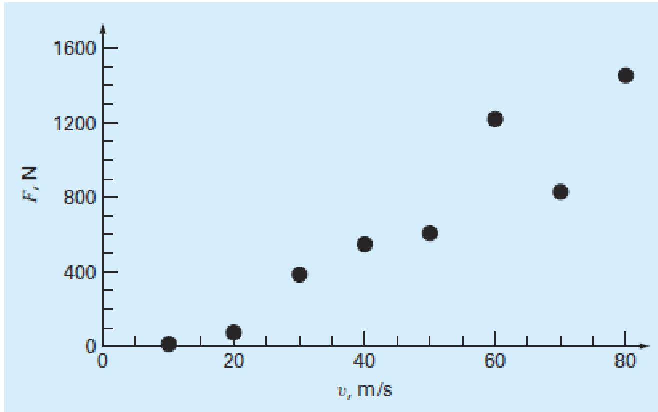

Figura 2: Diagrama de dispersão $F_a \times v$ para um corpo suspenso em um túnel de vento.

Apesar do cálculo acima, e de não ser exatamente óbvio, a relação entre força de arrasto e velocidade não pode ser estritamente linear. Essa conclusão se torna evidente se assumimos que a força deve se anular para velocidade zero. Uma relação estritamente linear teria necessariamente a muito próximo de zero[2].

Um ajuste mais apropriado seria feito fixando $a = 0$, ou seja, fazendo $F_a = bv$. Permita-nos, no entanto, aumentar os graus de liberdade da solução, aplicando uma forma mais geral, do tipo

$$F_a = av^b, \tag{3}$$

que é tal que $F(0) = 0$.

(b) Aplique o método dos quadrados mínimos para obter os parâmetros a e b que melhor ajustam a função (3) aos dados da tabela 1.

A dependência da força de arrasto com a velocidade pode ser derivada pela teoria da mecânica dos fluidos, apesar de que dados experimentais desempenham um papel importante em sua formulação. A teoria diz que essa força deve ser proporcional ao quadrado da velocidade, ou seja, que temos uma relação do tipo

$$F_a = cv^2, \tag{4}$$

onde c é o chamado coeficiente de arrasto (em unidades de Kg/m). Esse parâmetro leva em conta as propriedades do objeto, como forma e aspereza, que afetam a resistência do ar, e ainda da densidade do meio (e.g. densidade do ar).

(c) Compare o valor de b encontrado no ajuste da função (3) – item (b) – com o valor teórico $b = 2$. Então, aplique o método dos quadrados mínimos para obter o coeficiente c que melhor ajusta a função (4) aos dados da tabela 1.

Observação: Em cada item monte o sistema linear de quadrados mínimos $A^tA\alpha = A^tb \Leftrightarrow A'\alpha = b'$, que pode então ser resolvido de qualquer maneira, inclusive utilizando o operador divisão a esquerda do MATLAB $\alpha = A'\backslash b'$ ou a matriz inversa $\alpha = inv(A') * b$.

[2] $F_a(0) = a + b.0 = a = 0$. Compare com o valor de a encontrado por quadrados mínimos.

4. PROBLEMA DE VALOR INICIAL

A equação diferencial que rege o movimento de um corpo e queda livre é a 2ªlei de Newton (1), sendo a força total F composta pela força peso F_g e pela força de arrasto F_a:

$$ma = mg - cv^2, \tag{5}$$

onde a força de arrasto aparece com um sinal negativo por ser contrária ao movimento. Como a aceleração é a derivada temporal da velocidade, temos a seguinte equação diferencial para v:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v^2. \tag{6}$$

Suponha que você queira descrever o movimento de um paraquedista em queda livre, que salta de um avião em um dado instante $t = 0$ com velocidade vertical inicial $v_0 = 0$. Esse problema consiste no seguinte *problema de valor inicial*:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v^2 \\ v(0) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

que possui a seguinte *solução analítica*:

$$v(t) = v_t \tanh\left(\frac{g\,t}{v_t}\right). \tag{8}$$

v_t é a chamada *velocidade terminal*, definida por

$$v_t = \sqrt{\frac{gm}{c}}, \tag{9}$$

que é tal que $v(t \to \infty) = v_t$.

Resolva o PVI (7) no intervalo $t \in [0, 12]$ utilizando $g = 9.81m/s^2$, $m = 70Kg$ e o valor de c obtido no item (c) da atividade 3, aplicando o

(a) método de Euler:

   i. Usando $h = t_i - t_{i-1} = 1.0$. Faça um gráfico da solução numérica no intervalo calculado, juntamente com a solução exata (8);

   ii. Repita o exercício utilizando $h = 10^{-q}$ onde $q \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e calcule o erro final[3] $e_q \equiv |v_n - v(12)|$ em cada caso. Faça o gráfico de[4] $\log_{10} e_q \times q$.

(b) método de Runge-Kutta 4ªordem:

   i. Usando $h = t_i - t_{i-1} = 1.0$. Faça um gráfico da solução numérica no intervalo calculado, juntamente com a solução exata (8);

   ii. Repita o exercício utilizando $h = 10^{-q}$ onde $q \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e calcule o erro final $e_q \equiv |v_n - v(12)|$ em cada caso. Faça o gráfico de $\log_{10} e_q \times q$.

(c) Explique o comportamento do erro para cada um dos métodos (Euler e Runge-Kutta 4a ordem), a partir dos gráficos dos itens anteriores:

[3] $n = \frac{12}{h} = 12.10^q$ é o número de passos dados em cada caso, sendo $v_n \approx v(12)$ o valor da aproximação de v no último ponto calculado.

[4] Observe que $q = -\log_{10} h$.

i. Coloque os gráficos de erros dos itens anteriores em um mesmo gráfico e calcule a ordem de convergência[5] obtida para cada um deles. Como esse resultado se compara à ordem de convergência teórica $p = 1$ e $p = 4$ para os método de Euler e Runge-Kutta?

ii. Explique se a solução numérica parece convergir para a solução exata conforme $h \to 0$. O que acontece quando se diminui muito o tamanho do passo h? Por quê?

5. Problema de Valor de Contorno

Suponha que ao invés da velocidade, você queira determinar a posição do paraquedista em função do tempo. Uma forma de se fazer isso é escrever a velocidade como sendo a derivada temporal da posição, $v = \frac{dx}{dt}$, de tal forma que a equação diferencial (6) pode ser escrita em termos de x:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{c}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \tag{10}$$

Como agora a equação diferencial do problema se trata de uma equação de 2a ordem, precisamos de duas condições suplementares. Uma situação posível seria medir a posição e a velocidade no instante inicial, o que resultaria em um problema de valor inicial. Suponha, no entanto, que você não saiba a velocidade vertical inicial do saltador, e que realize, ao invés disso, as medidas de sua posição (altitude) no instante inicial $x(0) = x_0$, e em um instante posterior $x(T) = x_T$. Colocando como referencial a altitude x_0, e definindo[6] $H \equiv x_T - x_0$ como a diferença de altitude entre os dois pontos medidos, o problema se configura como sendo o seguinte *problema de valor de contorno*:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{c}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \\ x(0) = 0,\ x(T) = H \end{cases} \tag{11}$$

que possui a seguinte *solução analítica*:

$$x(t) = \frac{m}{c}\ln\left(\frac{\cosh\left(\frac{g}{v_t}t + K\right)}{\cosh(K)}\right), \tag{12}$$

onde $K = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-e^{-(v_tT+H)c/m}}{e^{(v_tT-H)c/m}-1}\right)$.

Resolva o PVC (11) no intervalo $t \in [0, T]$, com $T = 12s$, $H = 446m$, $g = 9.81m/s^2$, $m = 70Kg$ e o valor de c obtido no item (c) da atividade 3. Aplique o método das diferenças finitas:

(a) Usando $h = t_i - t_{i-1} = 1.0$. Faça um gráfico da solução numérica no intervalo calculado, juntamente com a solução exata (8);

(b) Repita o exercício utilizando $h = 10^{-q}$ onde $q \in \{0, 1, 2, 3\}$[7] e calcule o erro máximo $e_q \equiv \max_{i=0..n}\{|x_i - x(t_i)|\}$ em cada caso. Faça o gráfico de $\log_{10} e_q \times q$.

[5] A ordem de convergência dos métodos numéricos é definida pelo valor p quando existe uma constante C tal que $e_i < Ch^{p+1}$. Sendo e_i o erro em cada passo, o *erro total* final (no passo n) será $e_q < ne_i < Ch^{p+1}(t_n - t_0)/h = C'h^p$.

[6] Lembre-se que estamos trabalhando com um eixo que cresce para baixo.

[7] Note que para $q = 3$ a matriz A o sistema linear a ser resolvido será $(n-1)\times(n-1) = 11999 \times 11999$! A resolução desse sistema é rápida somente porque se trata de uma matriz *tridiagonal*.

(c) Calcule a ordem de convergência obtida para esse problema. Como esse resultado se compara à ordem de convergência teórica das aproximações de diferenças finitas utilizadas para as derivadas?

Observação: Perceba que se trata de um problema *não linear*. Você precisará aplicar o método de Newton-Raphson para resolver o sistema não linear resultante da discretização por diferenças finitas. Utilize como aproximação inicial $x_i^{(0)} = \frac{H}{T} t_i$ (o valor de x se a velocidade fosse constante), e uma precisão de parada de $||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty < \varepsilon = 10^{-12}$. Resolva o sistema linear de cada iteração por meio do operador divisão a esquerda do MATLAB (se for resolver em outra plataforma, observar que se trata de um sistema tridiagonal, e que pode ser resolvido eficientemente adaptando o método de eliminação de Gauss para esse tipo de sistema).