MS 211 - ATIVIDADES COMPUTACIONAIS

Introdução a técnicas espectrais de colocação

1º sem/2014

6. Método da Colocação

Suponha que estamos novamente modelando o problema de queda livre, mas considerando agora uma relação *linear* entre a força de arrasto e a velocidade

$$F_a = cv, \tag{1}$$

de tal forma que temos a seguinte equação de movimento:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{c}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right). \tag{2}$$

Suponha ainda que estamos novamente interessados na *posição* do corpo em queda, da mesma forma como na atividade 5. Temos então o seguinte *problema de valor de contorno*:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{c}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right) \\ x(0) = 0,\ x(T) = H \end{cases} \tag{3}$$

que possui a seguinte *solução analítica*:

$$x(t) = v_t t + (H - v_t T)\left[\frac{1 - e^{-\frac{g}{v_t}t}}{1 - e^{-\frac{g}{v_t}T}}\right]. \tag{4}$$

Perceba que nesse caso a *velocidade terminal* é dada por

$$v_t = \frac{gm}{c}. \tag{5}$$

I. Ajuste os dados da tabela 1 da atividade 3 à função *linear*

$$F_a = cv \tag{6}$$

e encontre o valor de quadrados mínimos do coeficiente c (que agora tem unidades de Kg/s).

II. Resolva o PVC (3) no intervalo $t \in [0, T]$, com $T = 12s$, $g = 9.81m/s^2$, $m = 70Kg$ e o valor de c obtido acima. Utilize para a constante H os três últimos dígitos do seu RA[1]. Aplique o

(a) método das diferenças finitas:

i. Usando[2] $n = 12$. Faça um gráfico da solução numérica no intervalo calculado, juntamente com a solução exata (4);

ii. Repita o exercício utilizando $n = 2 + 10^q$ onde $q \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e calcule o erro máximo $e_n \equiv \max_{i=0..n}\{x_i - x(t_i)\}$ em cada caso. Faça o gráfico $\log_{10}|e_n| \times \log_{10} n$.

[1]Exemplo: se você tem RA=023388 deve usar $H = 388$.

[2]Perceba que $n = \frac{T-0}{h} = \frac{12}{h}$. Havíamos utilizado até agora $h = 10^{-q}$, o que é equivalente a fazer $n = 12.10^q$.

(b) método da colocação:

i. Usando $n = 12$. Faça um gráfico da solução numérica no intervalo calculado, juntamente com a solução exata (4);

ii. Repita o exercício utilizando $n \in \{4, 6, 8, \cdots, 26, 28, 30\}$ e calcule o erro máximo $e_n \equiv \max_{i=0..n}\{x_i - x(t_i)\}$ em cada caso. Faça o gráfico $\log_{10}|e_n| \times \log_{10} n$.

(c) Compare a eficiência dos métodos das diferenças finitas e da colocação, a partir dos gráficos dos itens anteriores:

i. Coloque os gráficos de erros dos itens anteriores em um mesmo gráfico e explique o comportamento do erro. Calcule a ordem de convergência (quando possível) para cada um deles. Como esses resultados se comparam às ordens de convergência esperadas?

ii. Considerando os gráficos acima, qual dos métodos resulta em uma maior precisão, e para qual valor de n? Estime o valor de n necessário para o método menos preciso atingir essa precisão máxima e tente obter essa precisão com o valor de n encontrado. O que acontece?

iii. Como você compara o *custo computacional* e a demanda por memória entre os métodos ao se obter uma mesma precisão?

7. Diferenciação Numérica

O princípio fundamental dos *métodos espectrais de colocação* é a aplicação de uma interpolação *global* dos dados discretos sobre um grid, e então a aproximação das derivadas da função pelas derivadas do interpolante sobre os pontos do grid.

Nessa atividade vamos comparar aproximações de derivadas por diferenças finitas com aproximações espectrais. Utilizaremos para isso a solução analítica (4) do PVC (3), que tem a seguinte derivada:

$$x'(t) = v(t) = v_t + \left[\frac{g\left(\frac{H}{v_t} - T\right)}{1 - e^{-\frac{g}{v_t}T}} \right] e^{-\frac{g}{v_t}t}. \tag{7}$$

Dados os pontos do grid t_i, para $i = 0 \ldots n$, e os valores nodais da função $x_i = x(t_i)$, calculados pela expressão (4), a aproximação v_i para a derivada *sobre os nós do grid*, é obtida da seguinte maneira:

- Seja $P_n(t)$ o polinômio de grau $\leq n$ que interpola $x(t)$ nos nós t_i, ou seja, $P_n(t_i) = x_i$;
- Faça $v_i = P_n'(t_i)$.

O polinômio interpolante pode ser escrito em termos dos poninômios de Lagrange $L_j(t)$:

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^{n} x_j L_j(t) \qquad \Rightarrow \qquad P_n'(t) = \sum_{j=0}^{n} x_j L_j'(t). \tag{8}$$

Assim, a aproximação para a derivada *sobre os nós do grid* é obtida por simples *multiplicação matricial*:

$$P'_n(t_i) = \sum_{j=0}^{n} x_j L'_j(t_i) \qquad \Rightarrow \qquad v_i = \sum_{j=0}^{n} D_{ij} x_j, \tag{9}$$

onde

$$D_{ij} \equiv L'_j(t_i). \tag{10}$$

No método das diferenças finitas, o interpolante é calculado *localmente* para um conjunto $m+1$ de pontos, dependendo da ordem m de interpolação desejada. Por exemplo, podemos aplicar a *diferença avançada* para o primeiro ponto:

$$v_0 = \frac{x_1 - x_0}{h}, \tag{11}$$

a *diferença atrasada* para o último ponto:

$$v_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{h}, \tag{12}$$

e a *diferença centrada* para os pontos intermediários:

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h}, \tag{13}$$

onde $h = t_{i+1} - t_i$. Isso resulta na seguinte matriz (tridiagonal) de diferenciação:

$$D = \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & & & & \\ -1 & 0 & 1 & 0 & & \cdots & \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ & \vdots & & 0 & -1 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Nos métodos espectrais, para se evitar problemas de instabilidade, são utilizados pontos não igualmente espaçados, por exemplo, os nós de *Gauss-Lobatto-Chebyshev*:

$$t_i = \cos\left(\frac{\pi}{n} t\right), \qquad \text{com} \quad i = 0 \ldots n, \tag{15}$$

que resultam na *matriz de diferenciação de Chebyshev*, que tem as seguintes componentes:

$$\begin{aligned} D_{00} &= \tfrac{2n^2+1}{6} \qquad D_{nn} = -\frac{2n^2+1}{6} \\ D_{ii} &= -\tfrac{t_i}{2\left(1-t_i^2\right)} \qquad \text{para } 1 \le i \le n-1 \\ D_{ij} &= \tfrac{c_i}{c_j} \tfrac{(-1)^{i+j}}{t_i - t_j} \qquad \text{para } i \neq j \end{aligned} \tag{16}$$

onde

$$c_i = \begin{cases} 2, & \text{se } i = 0, n \\ 1, & \text{se } 1 \le i \le n-1 \end{cases} \tag{17}$$

Utilizando as mesmas constantes da atividade 6, faça a diferenciação numérica da função (4) por meio de uma *multiplicação matricial*. Aplique

(a) diferenças finitas (matriz de diferenciação (14)):

  i. Usando $n = 12$. Faça um gráfico da solução numérica no intervalo calculado, juntamente com a solução exata (7);

  ii. Repita o exercício utilizando $n = 2 + 10^q$ onde $q \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e calcule o erro máximo $e_n \equiv \max_{i=0..n}\{x_i - x(t_i)\}$ em cada caso. Faça o gráfico $\log_{10}|e_n| \times \log_{10} n$.

(b) diferenciação espectral (matriz de diferenciação (16)):

  i. Usando $n = 12$. Faça um gráfico da solução numérica no intervalo calculado, juntamente com a solução exata (7);

  ii. Repita o exercício utilizando $n \in \{4, 6, 8, \cdots, 26, 28, 30\}$ e calcule o erro máximo $e_n \equiv \max_{i=0..n}\{x_i - x(t_i)\}$ em cada caso. Faça o gráfico $\log_{10}|e_n| \times \log_{10} n$.

(c) Compare a eficiência da diferenciação espectral e das diferenças finitas, a partir dos gráficos dos itens anteriores:

  i. Coloque os gráficos de erros dos itens anteriores em um mesmo gráfico e calcule a ordem de convergência (quando possível) para cada um deles. Como esses resultados se comparam às ordens de convergência esperadas?

  ii. Explique se a derivada numérica parece convergir para a derivada exata conforme $n \to \infty$. O que acontece quando se aumenta muito o número de pontos n? Por quê?

  iii. Dê o valor de n que resulta em uma maior precisão e compare com o valor encontrado no item (c)ii. da atividade 6. Como se poderia prever esses valores teoricamente?