

Eletromagnetismo

Q: Por que estudar eletromagnetismo?

L> interação fundamental da Natureza

- gravitacional
 - nuclear fraca
 - eletromagnética
 - nuclear forte
- ↓ intensidade

L> importante p/ descrição da estrutura da matéria:
átomos, moléculas, sólidos

L> importante escala macroscópica

Inicialmente: eletricidade e magnetismo: fenômenos separados

Início Sec. XIX: foi observado que correntes elétricas produzem campos magnéticos

• Faraday:

L> indução eletromagnética: campos magnéticos variáveis no tempo → campo elétrico

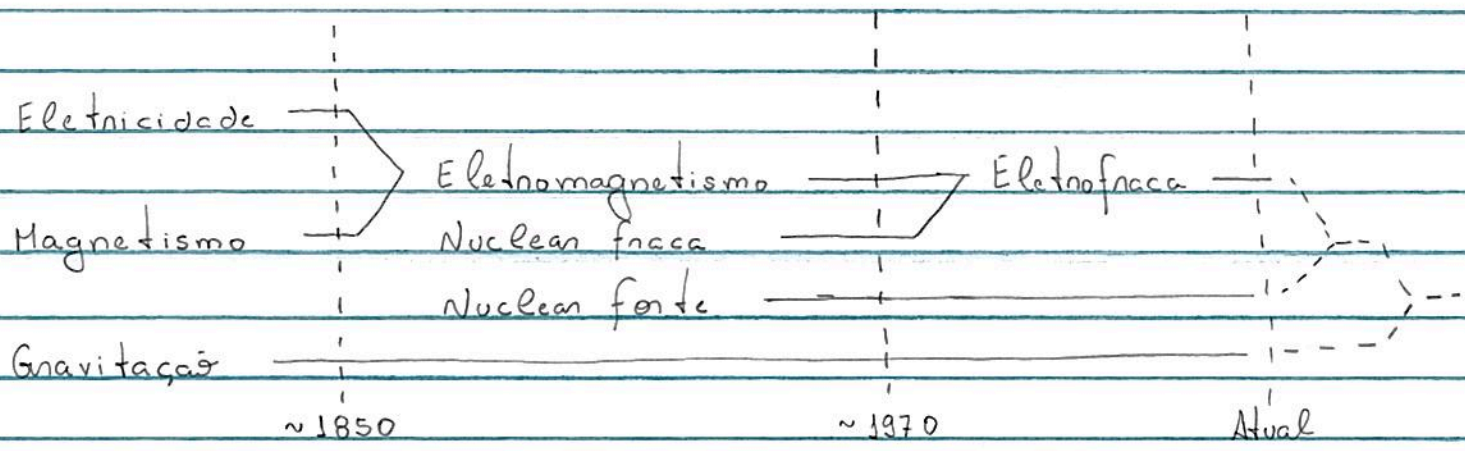
• Maxwell: formulação teórica

previsão: campos elétricos variáveis no tempo

L> campo magnético

L> luz = onda eletromagnética: unificação eletromagnetismo e ótica

Interações fundamentais



Faraday
Maxwell

• Hertz: produção ondas de rádio: teoria Maxwell OK!

→ verso pg. 1

Estrutura do curso: - cargas elétricas em repouso
- cargas elétricas em movimento

• Eletrostática: carga elétrica,
Lei de Coulomb
Campo elétrico
Lei de Gauss
Potencial elétrico

• Magnetismo: campos magnéticos ~ correntes estacionárias
Lei de Ampère

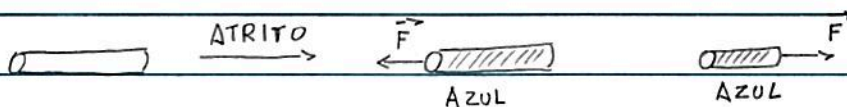
• Indução eletromagnética
• Equações de Maxwell

• Carga elétrica

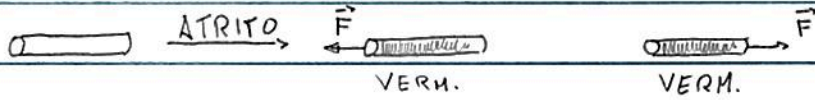
↳ propriedade corpo/partícula ~ massa

Considerar 3 experimentos:

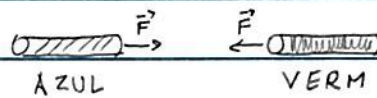
(1) 2 bastões plástico friccionados em pele animal
observação: repulsão



(2) 2 bastões vidro friccionados em seda
observação : repulsão



(3) bastão plástico friccionado em pele animal (+)
" vidro " " seda
observação : atração

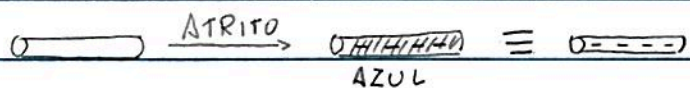


L> atrito bastão tecido -> mudança estado bastão adquire carga elétrica
bastão

L> tipo carga elétrica bastão plástico ≠ bastão vidro ~ 2 tipos de carga elétrica

B. Franklin :

(convenção) bastão plástico + pele animal : carga negativa



bastão vidro + seda : carga positiva



• Verifica-se que, após atrito entre objetos

bastão plástico carregado carga - Q
e pele animal " " + Q ; Q > 0

L> carga elétrica não é criada mas apenas transferida de um corpo p/ o outro : princípio conservação da carga elétrica

Resumo: carga elétrica: propriedade corpo/partícula
 2 tipos: positiva e negativa
 conservada
 quantizada (veja abaixo)

• É possível classificar os materiais quanto à mobilidade da carga elétrica em seu interior (primeira classificação macroscópica)

(1) condutores: cargas elétricas podem se movimentar através do material

Ex.: metais Fe, Cu

(2) isolantes: cargas elétricas permanecem retidas

Ex.: vidro, plástico

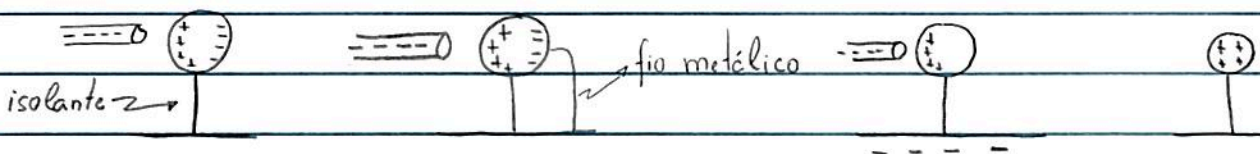
Si, GaAs (semicondutores)

• Processos de carga de um corpo,

- por atrito: experimentos (1)-(3)

- indução

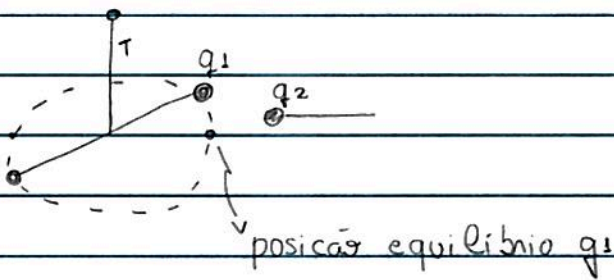
Considerar: esfera metálica inicialmente neutra \oplus bastão plástico
 carga $-Q$



• Lei de Coulomb (1785)

Coulomb : experimentos utilizando uma balança de torsão Cavendish (13 anos depois) ~ medida cte gravitacional

↳ determinação interações entre cargas elétricas !



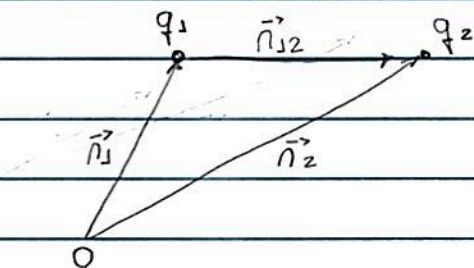
q_1 e q_2 : cargas pontuais
(dimensões partículas
 \ll separação)

Observações : $F \propto 1/r^2$, r : distância entre q_1 e q_2 .

$$F \propto q_1 q_2$$

↳ $F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}$; $k > 0$: cte,
 valor numérico depende sistema unidades

em detalhes,

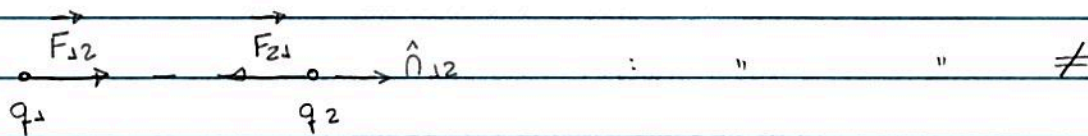
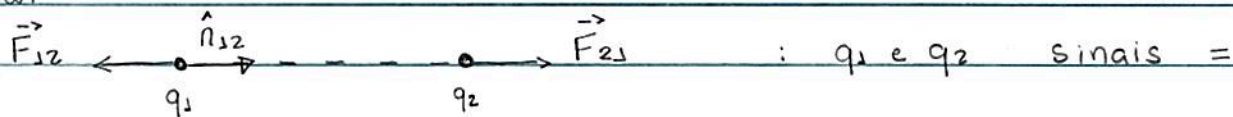


$$\hat{n}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{n}_{12} = - \vec{F}_{12} \tag{5.1}$$

\vec{F}_{ij} : força partícula j sob i : convenções !

notas



• Unidade carga elétrica, sistema internacional (SI)

[carga] : coulomb (C)

nesse caso

$$K \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} \frac{C^2 N m^2}{C^2} = 8.988 \cdot 10^9 N m^2 / C^2$$

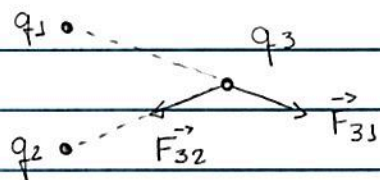
↳ velocidade da luz

↳ cte, permissividade do vácuo !

Eq. (5.1) : $\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{n}_{12}$: Lei de Coulomb (6.1)

veja verso pg. 5 →

• Considerar sistema 3 cargas q_i



Verifica-se que

$$\vec{F}_{3, TOTAL} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} : \text{princípio de superposição} \sim \text{interação gravitacional !}$$

caso geral, sistema N cargas,

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ji}^2} \hat{n}_{ji} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ji}^2} \hat{n}_{ji} \quad (7.1)$$

• carga elétrica e estrutura da matéria

				carga elétrica		
Átomo :	próton (p) :	positiva	+ e	} núcleo atômico		
	nêutron (n) :	zero	0			
	elétrons (e ou e ⁻) :	negativa	- e			

massas : $m_p \approx m_n \gg m_e$

notas : $|q_p| = |q_e| \rightarrow$ átomo neutro : $N_e = N_p$

$-e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C : carga elementar

- confinamento elétrons em torno núcleo \sim int. Coulomb
- " prótons e nêutrons no " \sim int. nuclear forte

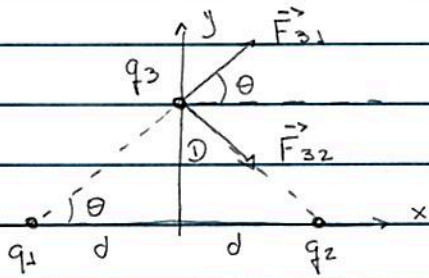
- corpo macroscópico : eletricamente neutro
em geral, processo carga \sim +/- elétrons !

\hookrightarrow carga corpo = carga elétrica líquida !

• Verifica-se que a carga elétrica de um corpo é quantizada em unidades da carga elementar e , isto é,

$$q = ne \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Exemplo: Considerar 3 partículas carregadas q_1, q_2 e q_3
Determinar a força sob q_3 devido a q_1 e q_2



hipótese: $|q_1| = |q_2|$; q_1 e q_3 : +
 q_2 : -

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$$

por simetria, apenas $F_{3,x} \neq 0 \rightarrow \vec{F}_3 = F_{3,x} \hat{x}$

$$\hookrightarrow F_{3,x} = F_{31} \cos \theta + F_{32} \cos \theta = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_3|}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2||q_3|}{r^2} \right) \cos \theta$$

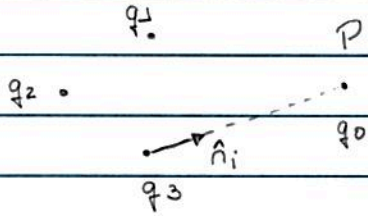
como $\cos \theta = \frac{d}{r}$; $r = \sqrt{d^2 + D^2}$ e $|q_1| = |q_2|$

$$\hookrightarrow F_{3,x} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_3|}{(d^2 + D^2)^{3/2}} d$$

Exercício: considerar $|q_1| = 1 \mu\text{C}$, $|q_2| = 2 \mu\text{C}$, $d = 13 \text{ cm}$ e $D = 4 \text{ cm}$ e determinar $F_{3,x}$.

Campo elétrico

Considerem um sistema formado por 4 cargas pontuais



pelo princípio de superposição, a força total sob \$q_0\$ devido às demais cargas é

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_{oi} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_i^2} \hat{n}_i \quad (9.1)$$

onde \$r_i\$: distância cargas entre cargas \$q_i\$ e \$q_0\$
 \$\hat{n}_i\$: versor, veja figura

Podemos reescrever (9.1) como

$$\vec{F} = q_0 \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{n}_i}_{\equiv \vec{E}} = q_0 \vec{E} \quad (9.2)$$

\$\vec{E}\$: campo elétrico

notas: \$\vec{E}\$ independente de \$q_0\$

• Interpretação Eq. (9.2):

- \vec{E} = força por unidade carga atuando sob q_0
- cargas q_1, q_2, q_3 são fontes p/ campo elétrico \vec{E} sentido por q_0
- uma distribuição de cargas no vácuo altera as propriedades (elétricas) do espaço, produzindo em cada pto P um campo elétrico \vec{E} .
- q_0 é uma carga de prova/teste. A existência de um campo elétrico \vec{E} no pto P onde q_0 está localizada $\sim \vec{F} \neq 0$.

Unidade \vec{E} no SI:

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 \rightarrow [E] = N/C$$

• Sobre a carga de prova/teste:

condição: $|q_0| \ll |\sum_i q_i|$, pois o campo \vec{E} produzido por q_0 não deve alterar a distribuição das cargas q_i

rigorosamente:
$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \vec{F}/q_0$$

entretanto, lembre que $(q_0)_{\min} = e$

OK p/ campos macroscópicos.

Q.: Por que introduzimos o conceito de campo elétrico?

(A) descrição interação entre cargas elétricas através da Lei de Coulomb (6.1)

- conceito de força
- ideia de ação a distância \sim interação instantânea

(B) descrição interação entre cargas elétricas utilizando \vec{E}

- campo elétrico \vec{E} é um mediador da interação

notas:

• p/ eletrostática (cargas q_i em repouso), descrições (A) e (B) são equivalentes

• entretanto, se q_i em movimento \rightarrow descrição (B) é mais apropriada pois inclui o fato de que a interação eletromagnética se propaga c/ velocidade finita = velocidade da luz (vácuo)

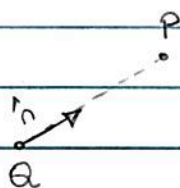
↳ movimento q_i é sentido por q_o após $\Delta t > 0$ (efeito retardado)

Resumo:

Lei de Coulomb (força) : carga \longleftrightarrow carga

Campo elétrico : carga \longleftarrow campo \longrightarrow carga
mediador

Ex. 1: campo elétrico carga pontual Q .

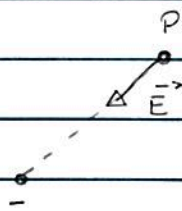
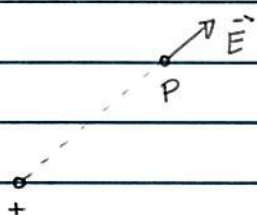


r : distância entre Q e o pto P

$$\text{Eq. (9.2): } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{n} \quad (12.1)$$

notas: $Q > 0 \rightarrow \vec{E}$ mesmo sentido \hat{n}

$Q < 0 \rightarrow \vec{E}$ sentido oposto \hat{n}



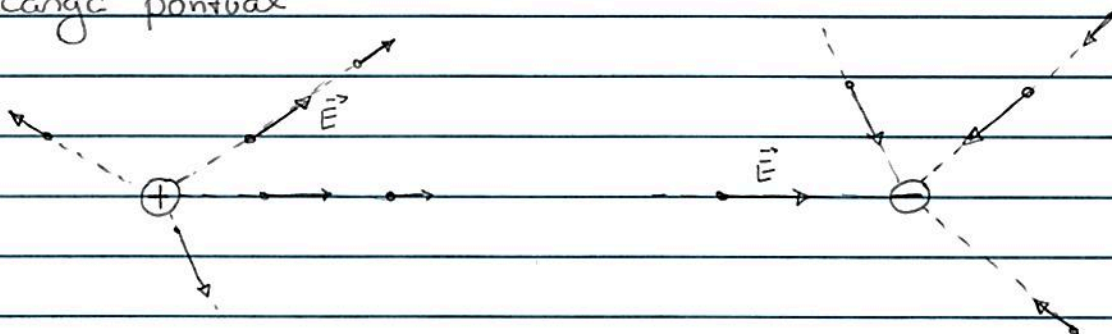
notas: $\vec{E} = \vec{E}(r)$, isto é, \vec{E} função $|r|$

caso geral: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$

* campo elétrico $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$: campo vetorial, isto é,

dado um referencial, p/ cada pto P descrito pelo vetor posição \vec{r} está associado um vetor $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$.

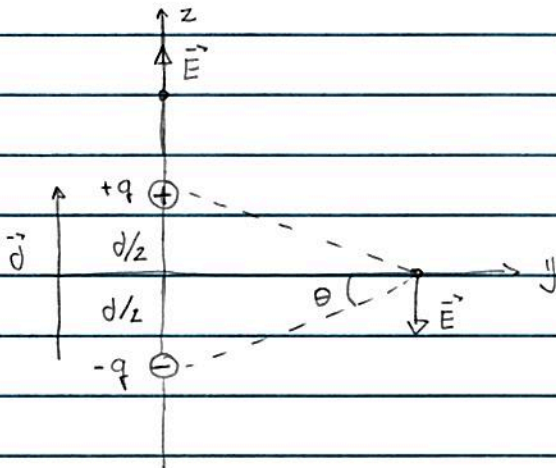
p/ carga pontual



Obs.: Eletrostática: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$

Eletrodinâmica: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$

Ex 2: campo elétrico devido a um dipolo elétrico



Definição: momento de dipolo elétrico,

$$\vec{p} = q\vec{d} \text{ (veja figura)}$$

vamos considerar 2 casos particulares

(i) $\vec{E} = \vec{E}(0, 0, z)$

pl/ $z > 0$,

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{(z-d/2)^2} \hat{z} - \frac{q}{(z+d/2)^2} \hat{z} \right)$$

$$= \frac{q}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(2z-d)^2} - \frac{1}{(2z+d)^2} \right) \hat{z}$$

hipótese $z \gg d$,

como $\frac{1}{(2z-d)^2} - \frac{1}{(2z+d)^2} \approx \frac{1}{4z^2} \left(\frac{1}{(1-d/2z)^2} - \frac{1}{(1+d/2z)^2} \right) \approx \frac{1}{4z^2} \frac{2d}{z}$

$$\hookrightarrow \vec{E} = \vec{E}(0, 0, z) \approx \frac{qd\hat{z}}{2\pi\epsilon_0 z^3} = \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 z^3}$$

$$(ii) \vec{E} = \vec{E}(0, y, 0)$$

por simetria, apenas a componente \hat{z} é não nula

$$\hookrightarrow E_z(0, y, 0) = 2 E_{+,z} \sin \theta$$

$$\text{como } \sin \theta = \frac{d/2}{\sqrt{y^2 + d^2/4}} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4y^2}}$$

$$E_{+,z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{y^2 + d^2/4} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d^2 + 4y^2}$$

$$\hookrightarrow \vec{E}(0, y, 0) = -2 \cdot \frac{qd}{\pi\epsilon_0 (d^2 + 4y^2)^{3/2}} \hat{z} = -2 \cdot \frac{\vec{p}}{\pi\epsilon_0 (d^2 + 4y^2)^{3/2}}$$

por simetria,

$$\vec{E}(x, y, 0) = -2 \cdot \frac{\vec{p}}{\pi\epsilon_0 (d^2 + 4x^2 + 4y^2)^{3/2}}$$

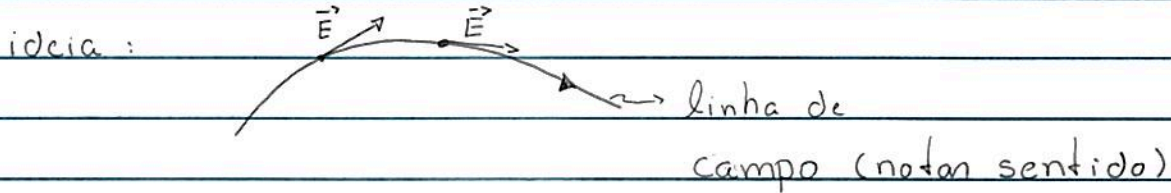
Exercício: Determinar $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$

Obs.: Eletrostática: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$
Eletrodinâmica: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$

Linhas de campo (conceito introduzido por Faraday)

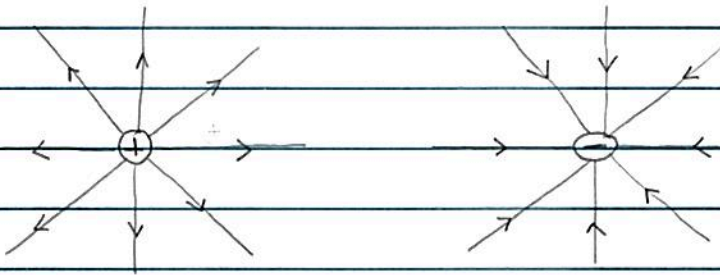
Forma p/ a visualização do campo elétrico \vec{E}

Definição: curva cuja tangente no pto P indica a direção do campo elétrico \vec{E} .

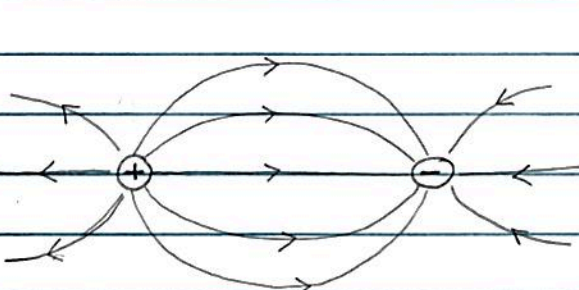


Obs.: densidade da linhas \propto magnitude de \vec{E}

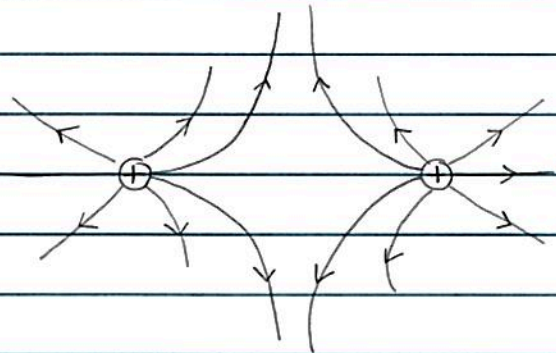
Exemplos:



: simetria radial

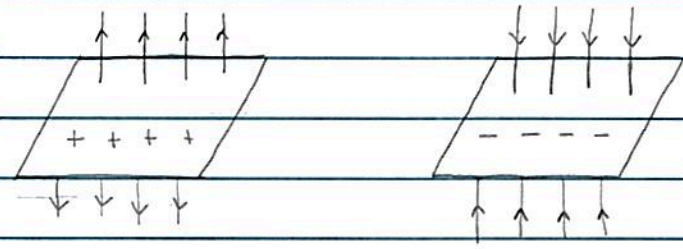


(simetria axial)



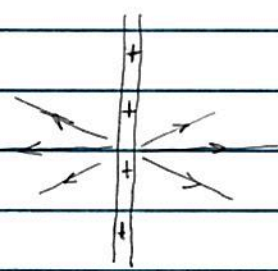
- plano ∞ , densidade superficial de carga σ (carga/área)

densidade uniforme : $\sigma = cte$



notas : campo \vec{E}
uniforme.

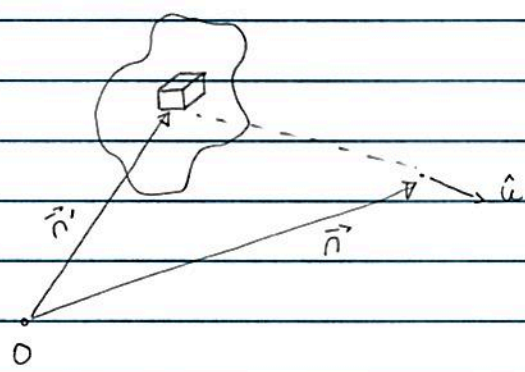
- fio ∞ , densidade linear de carga λ (carga/comprimento)



: simetria axial

-> verso pg. 15

• Considerar uma distribuição contínua de cargas, densidade volumétrica de carga $\rho = \rho(\vec{r})$ (carga/volume)

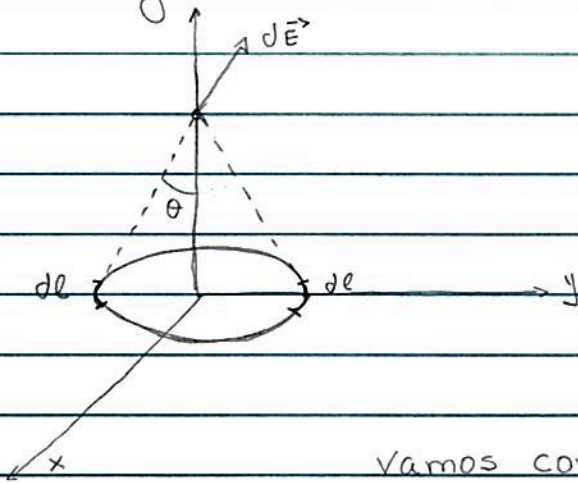


$$\hat{u} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

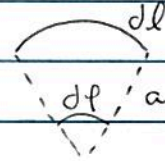
$$dq = \rho dv$$

$$Eq. (9.2) : \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u} \quad (16.1)$$

Ex. 3: campo elétrico anel raio a , densidade linear de carga $\lambda = \text{cte}$



anel C plano x-y



Vamos considerar caso particular $\vec{E} = \vec{E}(0,0,z)$
hipótese: $\lambda > 0$

notas: por simetria, apenas componente \hat{z} é não nula.

campo dE_z devido a dl :

$$dE_z = dE \cos \theta \quad ; \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{z^2 + a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a \, d\phi}{z^2 + a^2}$$

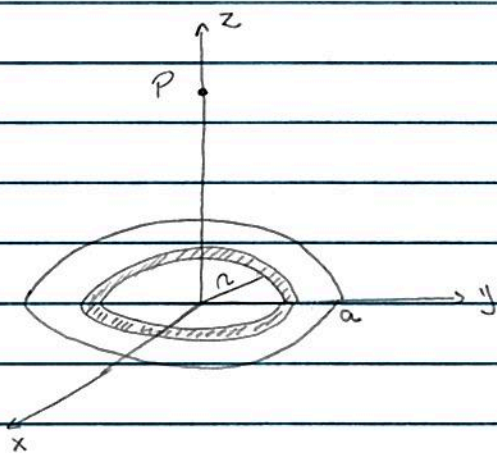
$$dq = \lambda dl = \lambda a \, d\phi$$

$$\hookrightarrow E_z(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda a z \, d\phi}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \lambda 2\pi a$$

como $Q = 2\pi a \lambda$

$$\hookrightarrow \vec{E}(0,0,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \quad (17.1)$$

Ex. 4: campo elétrico disco raio a , densidade superficial de carga $\sigma = \text{cte}$



disco @ plano $x-y$

caso particular $\vec{E} = \vec{E}(0,0,z)$

campo devido anel raio n e largura dn ,

$$\text{Eq. (17.1)} : d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2+n^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \frac{n dn}{(z^2+n^2)^{3/2}} \hat{z} \quad (z > 0)$$

como $dq = \sigma dA = \sigma(2\pi n dn)$

$$\hookrightarrow \vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{n dn}{(z^2+n^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+a^2} t^{-3/2} dt \hat{z}$$

$$t = z^2 + n^2 \rightarrow dt = 2n dn$$

$$\hookrightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right) \hat{z} ; z > 0$$

Incluindo pto $z < 0$ (exercício),

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right) \hat{z} \quad (18.1)$$

caso particular, plano infinito, $\sigma = \text{cte}$,

$a \rightarrow +\infty$ em (18.1) :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{z} \quad : \text{campo uniforme!} \quad (19.1)$$

(veja pg. 16)

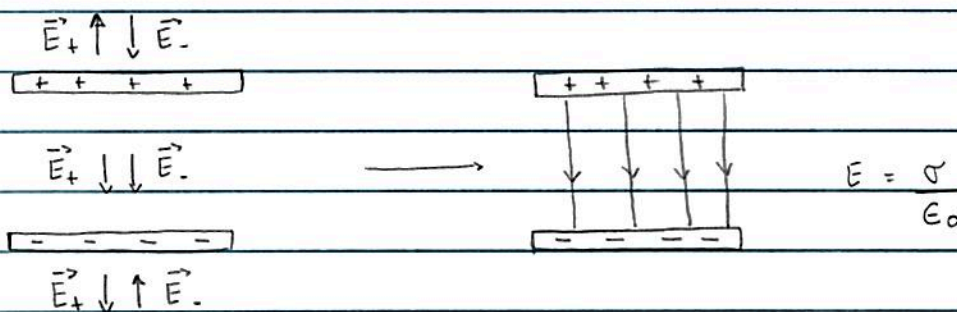
notas : \vec{E} não é contínuo em $z=0 \sim$ hipótese : espessura plano nula !

Exercício : considere dipolo elétrico \vec{p} em um campo magnético uniforme \vec{E} . Mostre que :

(a) $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$: torque sob dipolo elétrico

(b) $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$: energia potencial sistema

Exemplo configuração c/ campo \vec{E} uniforme :
2 placas //, cargas $+Q$ e $-Q$

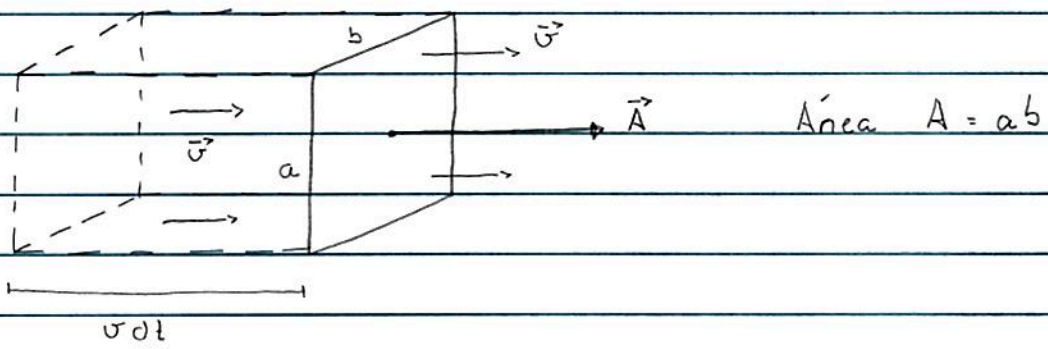


Lei de Gauss

• Fluxo

Lembran hidrodinâmica : consideran fluido (regime estacionario) cuja velocidade de escoamento é $\vec{v} = cte$.

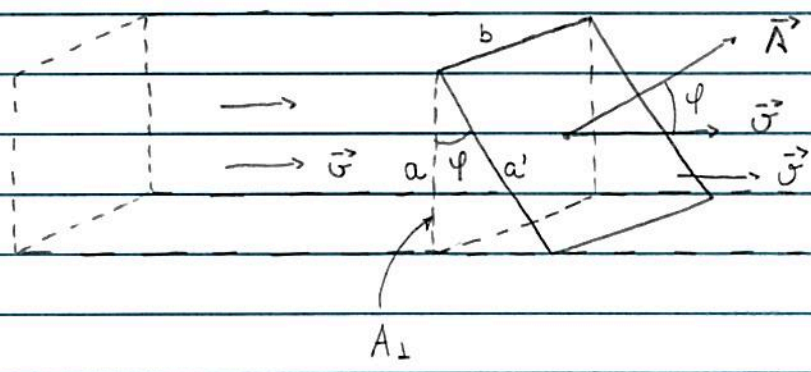
Obs.: regime estacionário : $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$, isto é, \vec{v} é cte no tempo



Q.: Qual volume de fluido dV atravessa área A no intervalo de tempo Δt ?

$dV = v dt A \rightarrow \frac{dV}{dt} = v A$: volume fluido através A / tempo (20.1)

Considere a área "inclinada" A abaixo



$A = a'b$
 $A_{\perp} = ab$

$a = a' \cos \phi$

nesse caso,

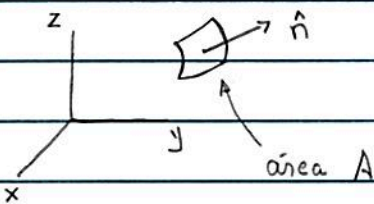
$$dV = v dt A_{\perp},$$

pois volume fluido através $A =$ volume fluido através A_{\perp}

notas:

$$\frac{dV}{dt} = v A_{\perp} = v a b = v a' b \cos \phi = v A \cos \phi \quad (21.1)$$

• Considerar superfície (não necessariamente plana), área A em 3-D



notas: • apenas o valor de A não é suficiente p/ determinarmos a superfície;

• é necessária uma orientação = vetor unitário \hat{n}

Definição: $\vec{A} = A \hat{n} \quad (21.2)$

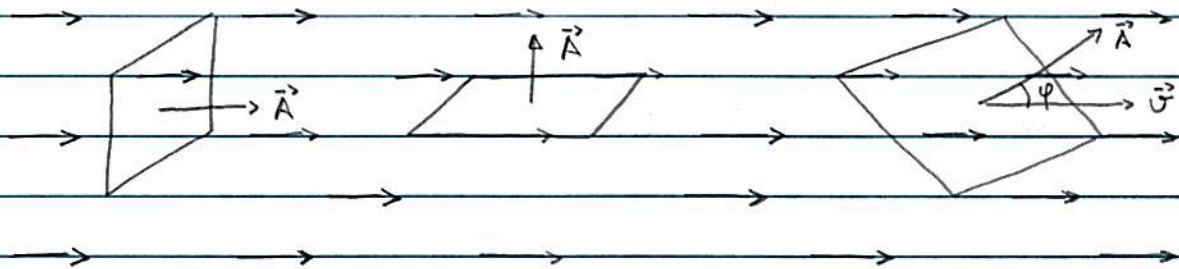
Utilizando (21.2), podemos escrever (20.1) e (21.1):

(veja figuras p/ a definição vetor \vec{A}):

$$\Phi \equiv \frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A} \quad : \quad \text{fluxo fluido através} \quad (21.3)$$

superfície \vec{A}

notas:



$$\Phi = \sigma A$$

$$\Phi = 0$$

$$\Phi = \sigma A \cos \varphi$$

$$\vec{\sigma} \parallel \vec{A}$$

$$\vec{\sigma} \perp \vec{A}$$

$$\angle \vec{\sigma} \text{ e } \vec{A} = \varphi$$

• Fluxo campo elétrico \vec{E}

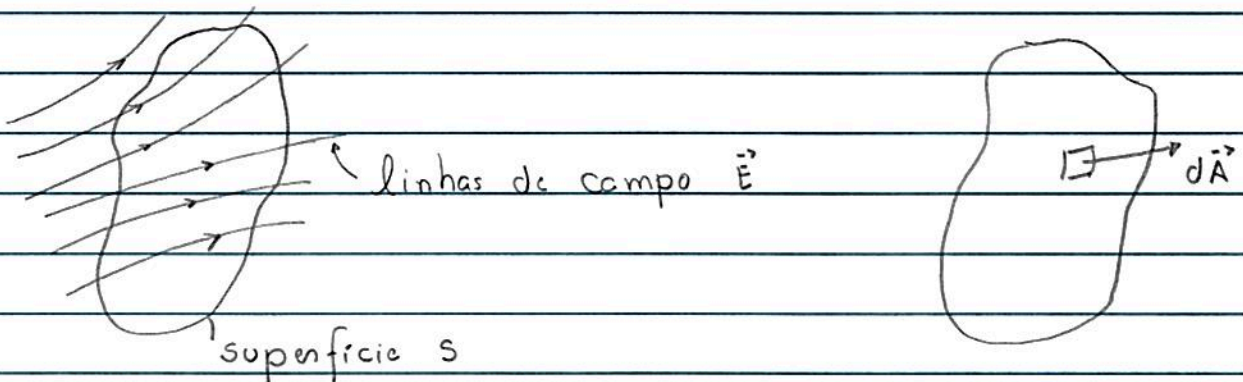
• consideramos campo elétrico uniforme \vec{E} e área \vec{A} (plana, retangular) como acima

utilizando (21.3), podemos definir (substitua $\vec{\sigma} \rightarrow \vec{E}$ acima)

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad : \quad \text{fluxo campo elétrico } \vec{E} \text{ através superfície } \vec{A} \quad (22.1)$$

• consideramos caso geral, isto é, $\vec{E} = \vec{E}(\vec{n})$

superfície S arbitrária



Ideia: considerem fluxo $d\Phi$ através elemento de área $d\vec{A}$,

$$\text{Eq. (22.1)} : d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(\vec{n}) \cdot d\vec{A}$$

\hookrightarrow campo \vec{E} no pto $\vec{n} \in d\vec{A}$!

$$\hookrightarrow \Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} : \text{fluxo total campo } \vec{E} \text{ através superfície } S \quad (23.1)$$

em particular, se superfície S é fechada (esfera, por exemplo)

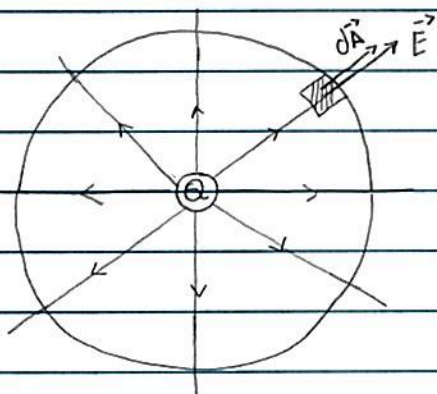
$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (23.2)$$

Obs.: p/ superfície fechada, sentido $d\vec{A}$ (ou \hat{n}) = p/ fora superfície

• Lei de Gauss,

\hookrightarrow verso pg. 22

• considerem carga pontual $Q > 0 \oplus$ superfície esférica S , raio R centro = posição carga Q



nesse caso: $d\vec{A} \parallel \vec{E}$ e $E = E(r)$ p/ \forall pto $\in S$

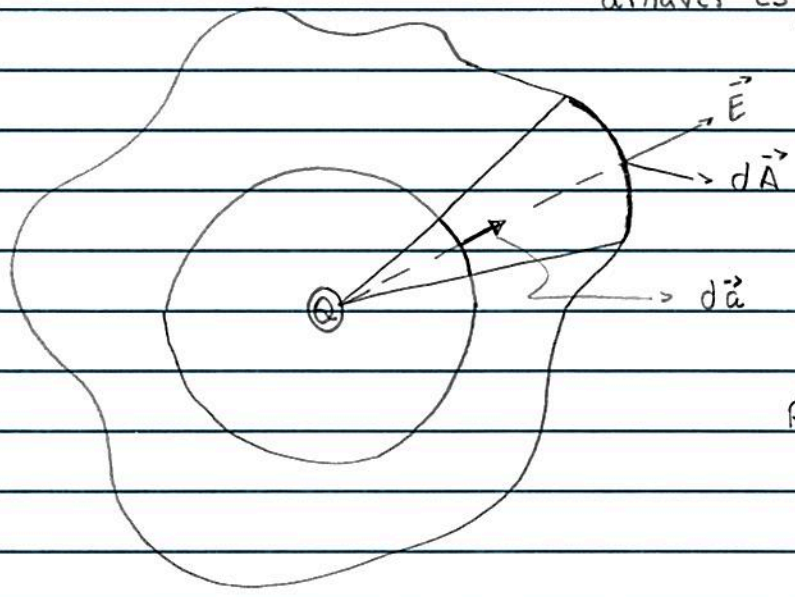
$$\begin{aligned} \hookrightarrow (23.2) \quad \Phi &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S E dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \int dA \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (23.3)$$

$$\hookrightarrow \oint_{\text{ESFERA}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} ; \quad Q \in \text{interior esfera} \quad (24.1)$$

notas: fluxo Φ é independente do raio r da esfera

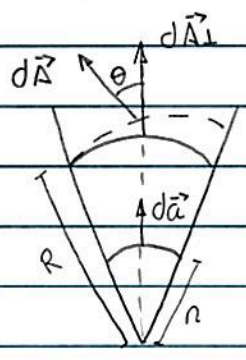
- consideramos carga pontual $Q > 0$;
 superfície esférica raio r , centro = posição esfera ;
 " arbitrária S fechada

vamos verificar que : \oint campo \vec{E} através esfera = \oint campo \vec{E} através S !



R : distância carga - elemento área $d\vec{A} \in S$

- relação $d\vec{a}$ e $d\vec{A}$



$$dA_{\perp} = dA \cos \theta = da \frac{R^2}{r^2}$$

$$\hookrightarrow dA = da \frac{R^2}{r^2} \frac{1}{\cos \theta}$$

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{a} = E(n) da \quad : \text{flux campo } \vec{E} \text{ através } d\vec{a}$$

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(R) dA \cos\theta \quad : \text{ " " " " } d\vec{A}$$

notas:

$$d\phi = \underbrace{\left(\frac{E(n) n^2}{R^2} \right)}_{E(R)} \underbrace{\left(\frac{da R^2}{n^2 \cos\theta} \right)}_{dA} \cos\theta = E(n) da = d\phi !$$

como p/ cada $d\vec{A} \in S$ temos $d\vec{a} \in$ esfera tal que $d\phi = d\phi$

$$\hookrightarrow \oint_{\text{ESFERA}} = \oint_S$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (24.1)} : \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad ; \quad Q \in \text{interior} \quad (25.1) \\ \text{superfície } S$$

• caso geral, N cargas pontuais q_i e interior superfície S

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot d\vec{A} = \sum_{i=1}^N \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{A} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

princípio superposição

$$\hookrightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int dV \rho(\vec{r}) \quad : \text{Lei de Gauss} \quad (25.2)$$

cargas e interior
sup. S

volume definido
por S .

Obs.: 1 - Lei de Gauss é equivalente Lei de Coulomb, apenas na formulação;

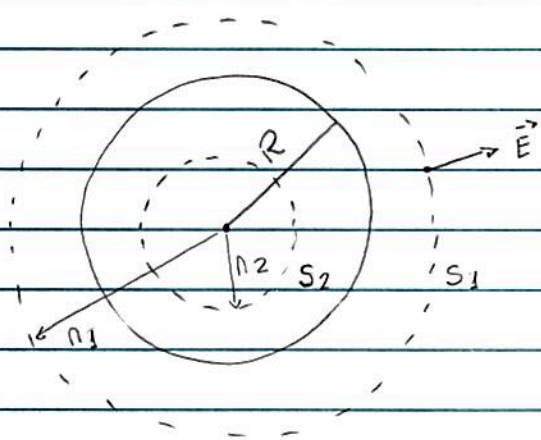
2 - interpretação (25.2): cargas elétricas são fontes campo elétrico

3 - superfície imaginária S = superfície Gaussiana

4 - importante ingrediente determinação (25.2): $F \propto \frac{1}{r^2}$ (veja (23.3))

5 - " " " " : princípio superposição

Ex. 1: Esfera raio R , densidade (volumétrica) carga $\rho = \text{cte}$;
determinar campo \vec{E} p/ pto's internos e externos à esfera.



notas: por simetria, campo \vec{E} possui apenas componente radial não nula, i.e., $\vec{E} = E(r)\hat{n}$

↳ superfície Gaussiana = esferas S_1 e S_2

(i) $r \geq R$,

p/ esfera S_1 : $d\vec{A} = dA\hat{n}$

$$\Phi = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{S_1} E(r) dA = E(r_1) \oint_{S_1} dA = 4\pi r_1^2 E(r_1)$$

$$Q = \int_V \rho dv = \rho \int_V dv = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \quad : \text{carga interior } S_1$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (25.2)} : 4\pi n_1^2 E(n_1) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{carga total esfera}$$

$$\hookrightarrow E(n) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 n^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{n^2} ; n \geq R$$

(ii) $n < R$,

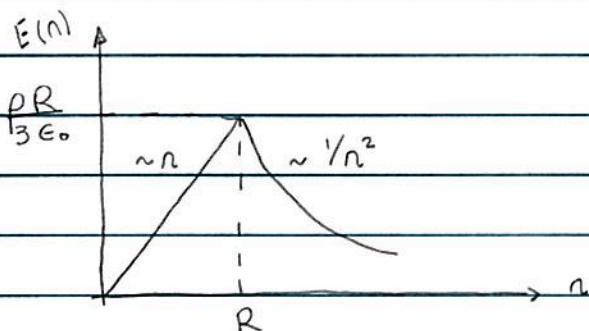
pl esfera S_2 : $d\vec{A} = dA \hat{n}$

$$\Phi = \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{S_2} E(n) dA \underbrace{\hat{n} \cdot \hat{n}}_1 = 4\pi n_2^2 E(n_2)$$

$$Q = \int_{V'} \rho dv = \rho \underbrace{\int \sin\theta d\theta d\phi}_{4\pi} \int_0^{n_2} n^2 dn = 4\pi\rho \cdot \frac{1}{3} n_2^3$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (25.2)} : 4\pi n_2^2 E(n_2) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot 4\pi\rho \frac{1}{3} n_2^3$$

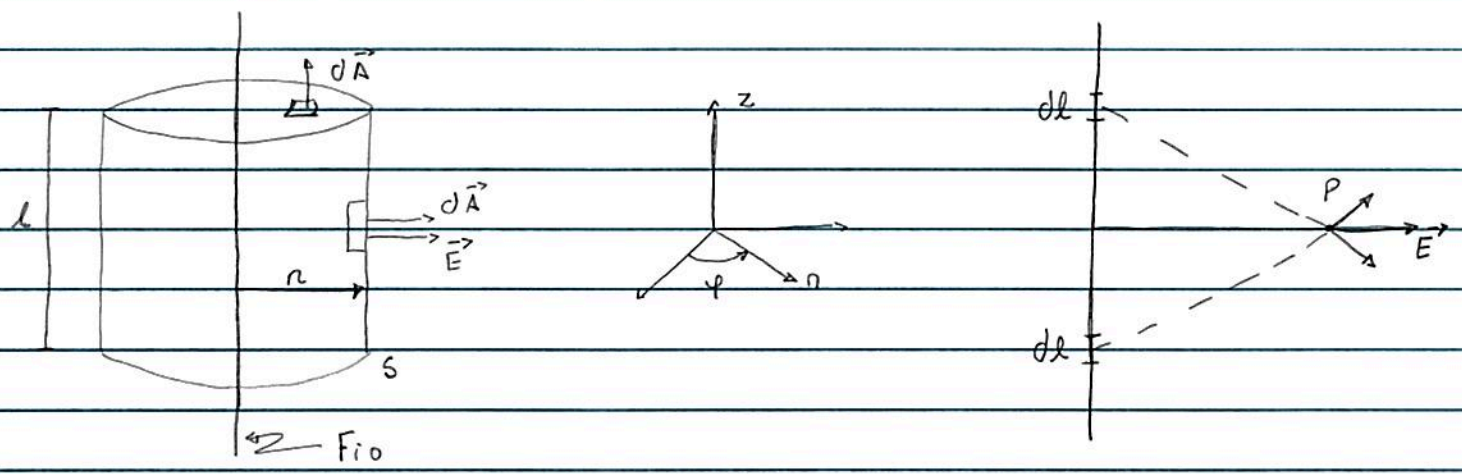
$$\hookrightarrow E(n) = \frac{\rho n}{3\epsilon_0} ; n < R$$



notas : simetria sistema \rightarrow cálculo Φ "fácil"

considerar : $\rho \neq \rho(n)$, i.e. distribuição de carga não esféricamente simétrica!

Ex. 2: Fio infinito, densidade (linear) carga $\lambda > 0$; $\lambda = \text{cte}$
determinar campo elétrico \vec{E} .



notas: por simetria, apenas componente radial \vec{E}
 (coord. cilíndricas) e não nula, i.e., $\vec{E} = E(r) \hat{n}$
 \hookrightarrow superfície Gaussiana = cilindro S

base S: $d\vec{A} = \pm dA \hat{z} \rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$
 lateral S: $d\vec{A} = dA \hat{n} \rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) dA$

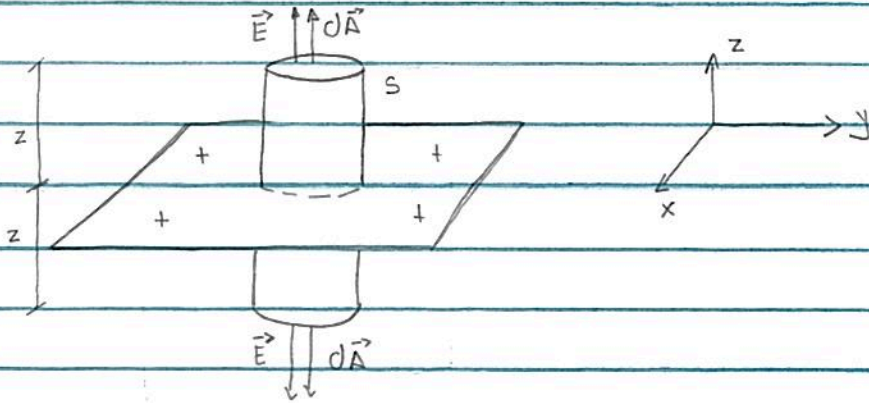
$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{(LATERAL)}} E(r) dA = E(r) (2\pi r l)$$

$$Q = \int \lambda dl = \lambda l \quad : \text{ carga interior S}$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (25.2)} : E(r) \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda l \rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

Obs.: comparar c/ cálculo via Eq. (16.1)

Ex. 3 : Plano infinito, densidade (superficial) de carga $\lambda = \text{cte}$,
 $\lambda > 0$; determinar campo elétrico \vec{E} .



notas: por simetria, apenas componente \hat{z} do campo elétrico
 é não nula, i.e., $\vec{E} = E(\vec{n}) \hat{z}$
 \hookrightarrow superfície Gaussiana = cilindro S

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{face superior } S} E(\vec{n}) dA \hat{z} \cdot \hat{z} + \int_{\text{base } S} E(\vec{n}) dA (-\hat{z}) \cdot (-\hat{z}) = 2EA$$

$$Q = \int_S \sigma dA = \sigma \int_S dA = \sigma A : \text{carga interior } S$$

Área interseção plano-cilindro

$$\hookrightarrow \text{Eq. (25.2)} : 2EA = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\hookrightarrow \vec{E} = E(x, y, z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \hat{z} : \text{comparar Eq. (19.1)}$$

notas Ex. 1, 2 e 3 : simetria distribuição carga \rightarrow escolha superfície Gaussiana !

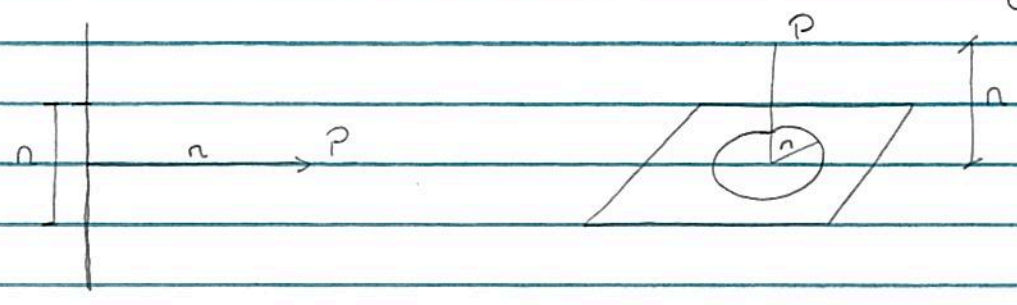
Obs.: os resultados

$$E \propto 1/n \quad , \quad \text{fio infinito, } \lambda = \text{cte e}$$

$$E = \text{cte} \quad , \quad \text{plano " , } \sigma = \text{cte}$$

estão relacionados a $E \propto 1/n^2$ p/ carga pontual:

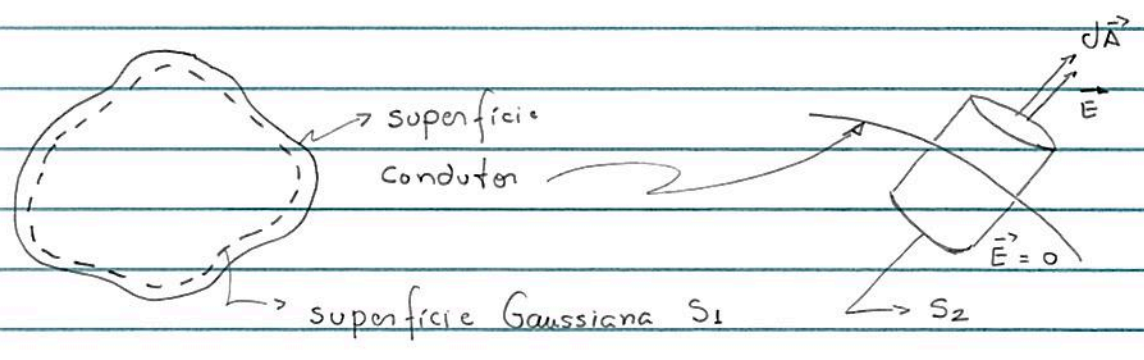
principal contribuiçãõ p/ campo \vec{E} no plo P: cargas mais próximas



fio: $E \propto \frac{Q}{n^2} \sim \frac{(\lambda n)}{n^2} \sim \lambda/n$

plano: $E \propto \frac{Q}{n^2} \sim \frac{(\sigma n^2)}{n^2} \sim \sigma = \text{cte}!$

Ex. 4: Considerar condutor (forma arbitrária), carga Q; determinar \vec{E} no interior e na superfície do condutor.



hipótese: condutor em equilíbrio eletrostático

Lembrar: cargas podem se movimentar no interior de um condutor

Equilíbrio eletrostático \rightarrow Cargas em repouso $\rightarrow \vec{E}_{int} = 0$ pois $\vec{F} = q\vec{E}!$

Q.: Qual a distribuição espacial da carga Q no condutor?

considere a superfície Gaussiana S_1 próxima sup. condutor

$\vec{E}_{int} = 0$ Lei de Gauss $\rightarrow Q_{interior\ S_1} = 0 \rightarrow Q$ @ superfície condutor

Q.: Qual o campo \vec{E} na superfície do condutor?

temos que: $\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel$

$\left\{ \begin{array}{l} \perp \rightarrow \text{componente paralela sup. condutor} \\ \parallel \rightarrow \text{" perpendicular " "} \end{array} \right.$

eq. eletrostático $\rightarrow \vec{E}_\parallel = 0$, caso contrário Q na superfície poderiam se movimentar
(veremos que sup. condutor = equipotencial.)

Considerar sup. Gaussiana S_2 ,

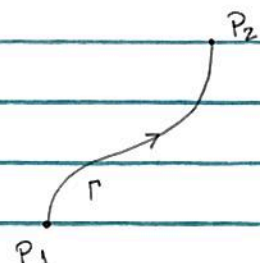
$$\Phi = \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{face superior}} E_\perp dA = E_\perp A = \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma dA = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

$\perp \rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$: campo sup. condutor carregado : componente Eq. (19.1)
 $\perp \rightarrow$ direção \perp sup. condutor.

Potencial elétrico

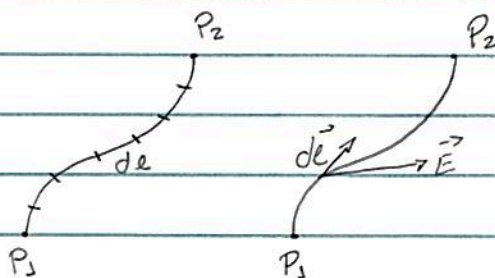
Considerar campo elétrico $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ devido a uma carga pontual $Q > 0$ em repouso.

Considerar a integral de linha do campo elétrico \vec{E} ao longo de caminho Γ , pto inicial = P_1 , pto final P_2 :

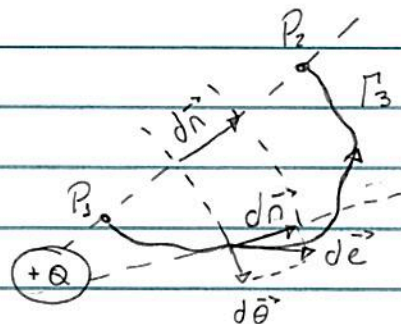
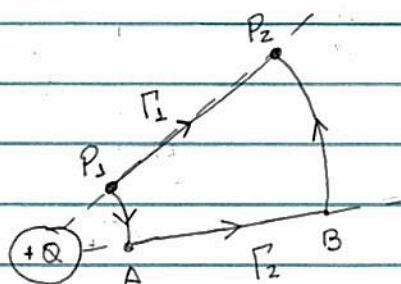
$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e}$$


ideia integral de linha:

- dividir Γ em segmentos $d\vec{e}$
- calcular $\vec{E} \cdot d\vec{e}$
- adicionar
- limit $de \rightarrow 0$



pt/ carga pontual



$\Gamma_1 : P_1 \rightarrow P_2$

$\Gamma_2 : P_1 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow P_2$

$\Gamma_3 : P_1 \rightarrow P_2$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{n}$$

$$- \Gamma_1: d\vec{e} = dr \hat{n}$$

$$\hookrightarrow \int_{\Gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (33.1)$$

$$- \Gamma_2: P_1 - A: d\vec{e} = r_1 d\theta \hat{\theta} \rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0$$

$$A - B: d\vec{e} = dr \hat{n}$$

$$B - P_2: d\vec{e} = -r_2 d\theta \hat{\theta} \rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0$$

$$\hookrightarrow \int_{\Gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{e} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (33.2)$$

- Γ_3 : notar que

$$\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{e} = \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{n} = E(\vec{r}) dr,$$

i.e., apenas a componente radial do vetor $d\vec{e}$ contribui p/ a integral de linha

$$\hookrightarrow \int_{\Gamma_3} \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_{\Gamma_3} \vec{E} \cdot d\vec{n} = \int_{\Gamma_3} E \cdot d\vec{n} = (33.1) !$$

Considerações análogas podem ser feitas p/ P_1 e P_2 not as longo mesma direção radial.

$$\hookrightarrow \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} \text{ independe do caminho } \Gamma \text{ (p/ } \perp \text{ carga pontual)}$$

• p/ uma distribuição de N cargas pontuais

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N \quad : \text{princípio de superposição}$$

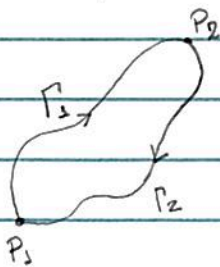
$$L \rightarrow \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^N \int_1^2 \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell}$$

independentes Γ

$L \rightarrow$ p/ campo eletrostático $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$, a integral de linha

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad : \text{independe caminho } \Gamma \quad (34.1)$$

Dessa forma, p/ um caminho fechado $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$



$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{1, \Gamma_1}^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{2, \Gamma_2}^1 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (34.2)$$

$$= \int_{1, \Gamma_1}^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_{1, \Gamma_2}^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Eq. (34.2) : campo eletrostático $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ é um campo conservativo

Eq. (34.1) \rightarrow podemos definir uma função escalar $V = V(\vec{r})$ tal que

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = V_2 - V_1 \equiv - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (34.3)$$

$V = V(\vec{r})$: potencial elétrico

(34.3) : $\Delta V = V_2 - V_1$: diferença potencial elétrico!

• unidade V,

podemos escrever (34.3) como

$$V_2 - V_1 = - \frac{1}{q} \int_1^2 q \vec{E} \cdot d\vec{e}$$

$$\hookrightarrow [V] = [W] = \frac{J}{C} = V : \text{Volet (SI)}$$

[carga]

• escolha zero do potencial,

p/ carga pontual Q;

$$(33.1) \oplus (34.3) : V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

(34.3) → zero (referencial) do potencial pode ser arbitrariamente escolhido pois apenas ΔV é definida

$$\text{p/ carga pontual : } V(r \rightarrow +\infty) = 0 \tag{35.1}$$

$$\hookrightarrow V(\vec{r}) = V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{e} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} : \text{potencial Coulombiano} \tag{35.2}$$

Interpretação (35.2) : trabalho realizado por uma força externa p/ movimentar uma carga unitária de ∞ até distância r da carga pontual Q!

notas: V : escalar v.s. \vec{E} : vetor
V ∝ 1/r E ∝ 1/r² (carga pontual)

• p/ uma distribuição localizada de cargas : escolha (35.1) OK!

Ex. 1 : Esfera raio R, densidade (volumétrica) de carga ρ ;
determinar potencial elétrico V p/ ptos internos e externos.

Vimos que (veja pg. 27).

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{n}, & r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{n}, & r \geq R \end{cases}$$

(i) $r \geq R$

Eq. (34.3) $\oplus V(r \rightarrow \infty) = 0 : V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dn'}{n'^2}$

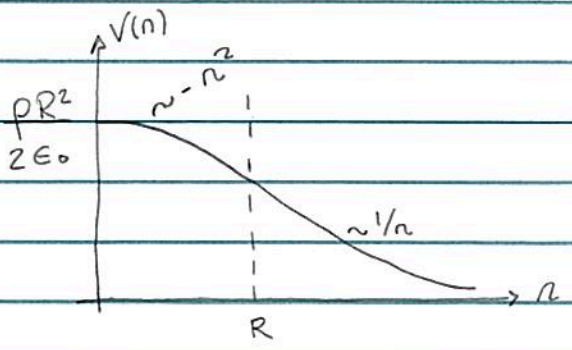
$d\vec{e} = dn' \hat{n}$ Carga total esfera

$= \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$

(ii) $r < R$

$$V(r) = - \int_{\infty}^R E(n') dn' - \int_R^r E(n') dn' = - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{dn'}{n'^2} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_R^r n' dn'$$

$$= \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}$$



• nota Eq. (34.3) : Dado $\vec{E} \rightarrow$ cálculo $V = V(\vec{n})$

Q. : Dado $V = V(\vec{n}) \rightarrow$ cálculo $\vec{E} = \vec{E}(\vec{n})$?

podemos escrever (34.3) como

$$V_2 - V_1 = \int_1^2 dV = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{e}$$

$\hookrightarrow dV = - \vec{E} \cdot d\vec{e}$, p/ descolamento infinitesimal $d\vec{e}$

em particular em coordenadas cartesianas,

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{n}) = \vec{E}(x, y, z) = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$$

$$d\vec{e} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

$$\hookrightarrow -dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

$$\text{Como } V = V(\vec{n}) = V(x, y, z) \rightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$\text{Como } dx, dy \text{ e } dz \text{ arbitrários } \rightarrow E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}; E_y = - \frac{\partial V}{\partial y}; E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}$$

Lembran operador gradiente $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} f = \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z}; f = f(x, y, z)$$

$$\hookrightarrow \vec{E} = - \vec{\nabla} V$$

(37.1)

- em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) :

$$\vec{\nabla} = \hat{n} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (38.1)$$

- em coordenadas esféricas (r, θ, φ) :

$$\vec{\nabla} = \hat{n} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (38.2)$$

Lembrar propriedades $\vec{\nabla} V$:

- $\vec{\nabla} V$ é tr linhas/superfícies $V = \text{cte}$
- $\vec{\nabla} V =$ direção máxima variação $V = V(\vec{r})$:

$$dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{n} = |\vec{\nabla} V| |d\vec{n}| \cos \theta \rightarrow dV_{\text{MAX}} \rightarrow \theta = 0 \rightarrow \vec{\nabla} V \parallel d\vec{n} !$$

• Vimos que:

distribuição cargas em repouso \rightarrow campo elétrico $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$
 pt. P \uparrow determinado via Eqs. (9.2) e (16.1)

Eqs. (34.3) \oplus (37.1) : relação entre \vec{E} e V

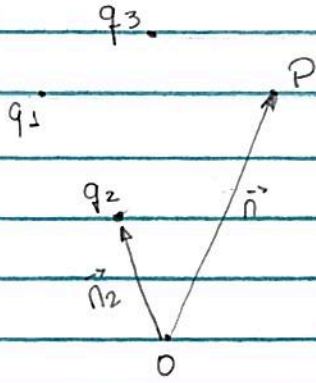
\hookrightarrow distribuição cargas em repouso \rightarrow potencial elétrico $V = V(\vec{r})$
 pt. P \uparrow

Q.: Como calcular?

• N cargas pontuais q_i em repouso,

Eq. (39.2) ⊕ princípio

superposição :
$$V(\vec{n}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i} \quad (39.1)$$

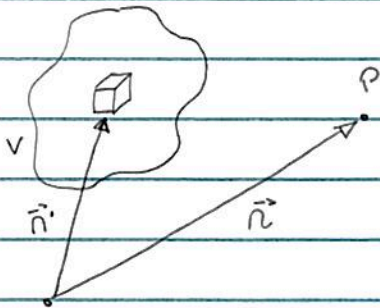


r_i : distância carga q_i - plo P

$(r_i = |\vec{n} - \vec{n}_i| ; i = 1, 2, \dots, N)$

Obs. : comparar (9.2) e (39.1)

• p/ uma distribuição contínua de cargas,



$\rho = \rho(\vec{n})$

$dq = \rho dv$

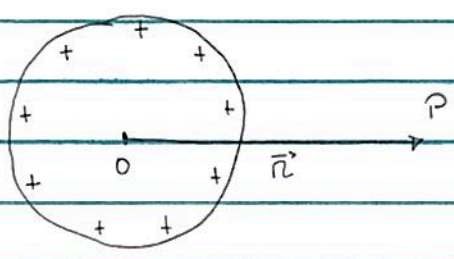
Eq. (40.1) :
$$V(\vec{n}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{n} - \vec{n}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{n}') dv}{|\vec{n} - \vec{n}'|} \quad (39.2)$$

Obs. : comparar (16.1) e (39.2)

Ex. 2 : Esfera condutora raio R, carga Q > 0
determinar V = V(r)

Vimos que o campo E devido à esfera condutora é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & , r \geq R \\ 0 & , r < R \end{cases}$$

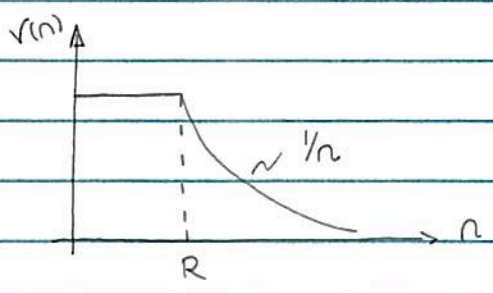


Eq. (34.3) ⊕ V(r → ∞) = 0 :

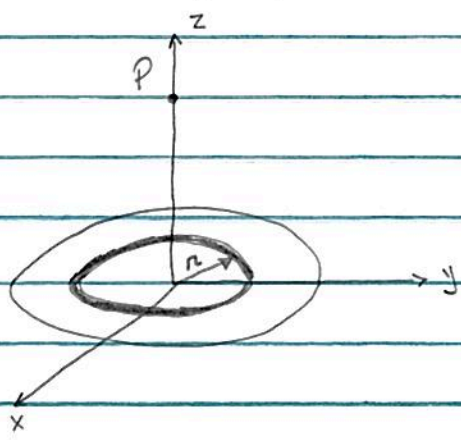
$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{n'^2} dn' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} ; r \geq R$$

$$d\vec{e} = dn' \hat{n}$$

$$V(r) = - \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{e} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} : \text{cte} , r < R$$



Ex. 3: potencial elétrico $V = V(0,0,z)$ disco raio a , densidade superficial de carga $\sigma = \text{cte}$ (veja pg. 18)



disco @ plano xy

potencial devido anel raio r e largura dr .

$$(39.2) : dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

como $dq = \sigma dA = \sigma (2\pi r dr)$

$$\hookrightarrow V(0,0,z) = \int dv = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left((a^2+z^2)^{1/2} - |z| \right)$$

Verificam

notar caso particular, $z \gg a, z > 0$

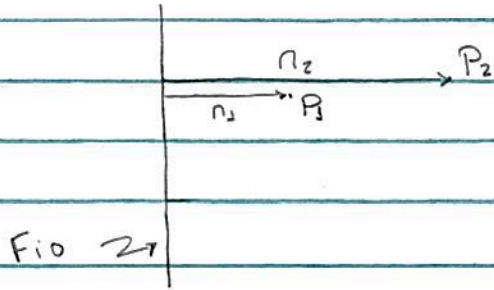
$$(a^2+z^2)^{1/2} - z = z \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{1/2} - z \approx \frac{a^2}{2z}$$

$$\hookrightarrow V(0,0,z) \approx \frac{\sigma a^2}{4\epsilon_0 z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 z} \cdot (\pi a^2 \sigma) : V \text{ carga pontual!}$$

Como $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

$$\hookrightarrow \vec{E}(0,0,z) = -\hat{z} \frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}} \right) \hat{z} : \text{Eq. (18.1)}$$

Ex. 4: potencial elétrico fio infinito, densidade linear de carga $\lambda = \text{cte}$



Vimos que (veja pg. 28)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

$$\text{Eq. (34.3)} : V(r_2) - V(r_1) = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

$d\vec{e} = dr \hat{r}$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_2 - \ln r_1)$$

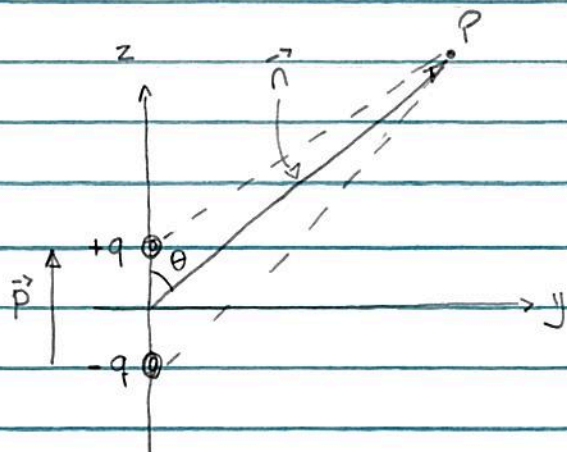
notas: nesse caso escolha $V(r \rightarrow \infty) = 0$ not ok

escolha: $r_1 = a$: zero potencial

$$\hookrightarrow V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{r}\right) \quad (42.1)$$

Exercicio: determinar $V(r)$ p/ cilindro condutor infinito, raio R.

Exercício : determinar $V(\vec{r})$ p/ dipolo elétrico (veja pg. 13) ;
em particular, considerar $r \gg d$ e mostrar que



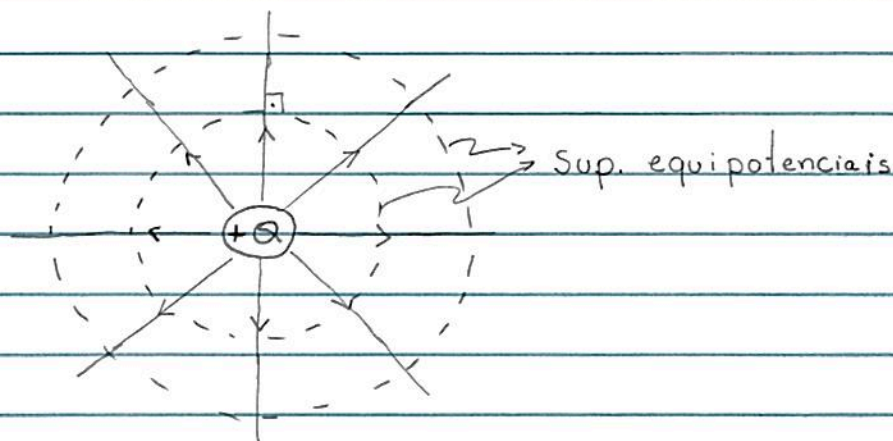
$$V(r) = \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$\vec{p} = q\vec{d}$: momento dipolo elétrico

• Superfícies equipotenciais

Definição : linha/superfície tal que $V(\vec{r}) = cte$

Ex. : carga pontual : sup. equipotenciais = esferas centro @ carga
(veja Eq. (35.2))

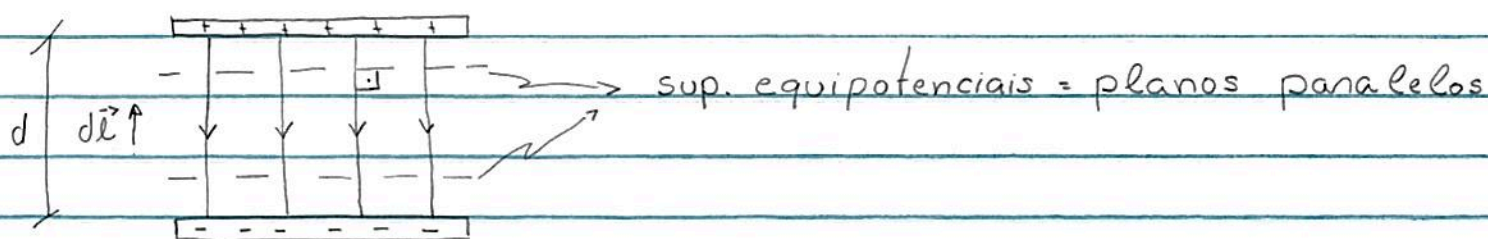


considerar deslocamento $d\vec{r}$ ao longo sup. equipotencial :

$$dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \rightarrow \vec{E} \perp \text{sup. equipotencial !}$$

\uparrow
 $V = cte$

Ex. : campo \vec{E} uniforme



$$\text{Eq. (34.3)} : V_+ - V_- = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{e} = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

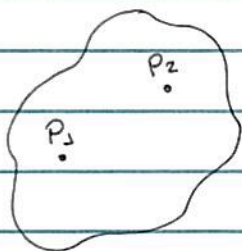
Ex. 5: Considerar condutor (forma arbitrária), carga Q
(veja pgs. 30 e 31)

vimos que em um condutor carregado em equilíbrio eletrostático :

$$\vec{E}_{\text{int}} = 0, \quad Q \text{ @ superfície condutor}$$

$$\vec{E} \text{ sup. condutor } \perp \text{ sup. condutor}$$

$$\begin{array}{l} \text{L} \rightarrow \\ (43.1) \end{array} \quad \text{sup. condutor} = \text{sup. equipotencial}$$



considerar plos P_1 e $P_2 \in$ interior condutor :

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0 \Rightarrow V_2 = V_1$$

L $V_{\text{int}} = \text{cte}$, em particular $V_{\text{int}} = V_{\text{sup}}$ (veja Ex. 2)

• Vimos que (pg. 34) o campo eletrostático é um campo conservativo

• Lembra sistemas conservativos: p/ partícula massa m sob \vec{F} ,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\hookrightarrow m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\hookrightarrow \int_1^2 d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{1 \rightarrow 2}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = T_2 - T_1 = W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(U_2 - U_1)$$

↑
p/ sistema conservativo

$$\hookrightarrow E = T_1 + U_1 = T_2 + U_2 : \text{energia total} = \text{cte de movimento}$$

└──┬──> energia potencial
└──┬──> energia cinética

• Considera partícula carga q sob campo \vec{E} , movimento 1 \rightarrow 2

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 q \vec{E} = -(U_2 - U_1) \quad (45.1)$$

em particular, se $U(r \rightarrow \infty) = 0$, temos que

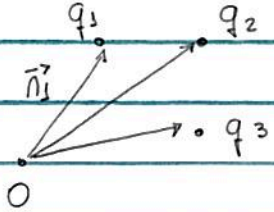
$$-\int_{\infty}^{\vec{r}} q \vec{E} = U(\vec{r}) = qV(\vec{r}) \quad (45.2)$$

↑
(34.3)

Interpretação (45.2) : trabalho realizado por uma força externa
 (veja (35.2)) p/ movimentar carga q de ∞ até
 posição \vec{r} cujo potencial (associado a
 uma certa distribuição de cargas) é $V(\vec{r})$.
 = energia potencial eletrostática U da carga q .

• Eq. (45.2) permite determinar a energia potencial eletrostática
 de uma certa distribuição de cargas.

Considerar, por exemplo, 3 cargas pontuais q_i nas posições \vec{r}_i ,



$$r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

considerar o processo de montagem do sistema

1 - w força externa $q_1 \infty \rightarrow \vec{r}_1$: 0

2 - " " " q_2 " : $q_2 V(\vec{r}_2) = q_2 \cdot \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

3 - " " " q_3 " : $q_3 V(\vec{r}_3) =$
 $= q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right)$

$$\hookrightarrow U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

p/ N cargas :

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (46.1)$$

notar: (46.1) pode ser escrita como

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \underbrace{\sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}}_{V(\vec{r}_i)}$$

↳ p/ distribuições contínuas de cargas:

$$dU = \frac{1}{2} dq V(\vec{r}) \quad : \quad \Delta U \text{ p/ adicionar carga } dq$$

$$= \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d\tau$$

↳ volume!

$$\hookrightarrow U = \frac{1}{2} \int d\tau \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) \quad (47.1)$$

Resumo eletrostática: